

# Mecánica Estadística II

## Programa resumido

Prof. Tomás S. Grigera

1. **Energías libres y transiciones de fase.** Formulación de la Mecánica Estadística: teoría ergódica y teoría de la información. Entropía. Energías libres y distribución de probabilidad del parámetro de orden. Susceptibilidad y teorema de fluctuación-disipación estático. Funciones de correlación espacial y relación con la susceptibilidad. Transiciones de fase. Singularidades en las energías libres. Teoremas de Yang y Lee. Ruptura espontánea de simetría: estados puros, ruptura de ergodicidad, condiciones de contorno.
2. **Modelos clásicos en el retículo.** Principales modelos en el retículo. Modelo de Ising: solución de campo medio, ruptura de simetría. Modelo de Ising completamente conectado: ruptura espontánea de simetría y exponentes críticos. Modelo  $p$ -spin ferromagnético completamente conectado. Caso  $p = 3$ : análisis de la transición de primer orden. Metaestabilidad y espinodales termodinámica y cinética. Histéresis. Ecuación de estado y construcción de Maxwell. Coexistencia de fases y heterogeneidad espacial o temporal; coarsening. Modelo Gaussiano: correlaciones de dos puntos, correlaciones de orden superior. Teorema de Wick. Funciones de correlación en campo medio.
3. **Teorías de campo clásicas para mecánica estadística.** Del discreto al continuo: derivación heurística de la teoría de Landau-Ginzburg. Derivada e integral funcional. Aproximación de Landau, exponentes críticos. Modelo Gaussiano como aproximación para  $T > T_c$  y  $T < T_c$  (efectos de las fluctuaciones a orden más bajo). Solución del modelo Gaussiano. Corrección por fluctuaciones hasta segundo orden a la aproximación de Landau, criterio de Ginzburg. Desarrollo diagramático de la teoría de Landau-Ginzburg: diagramas para la función de partición y funciones de correlación, energía libre y diagramas conectados, ecuación de Dyson, energía de Gibbs y diagramas irreducibles, desarrollo en bucles.
4. **Dinámica estocástica.** Dinámica transitoria y estacionaria. Procesos estocásticos. Ecuación de Langevin: partícula Browniana, oscilador armónico, generalizada. Límite sobreamortiguado. Procesos de Markov, ecuación maestra y ecuación de Fokker-Planck. Teorema de fluctuación-disipación. Dinámica crítica: ley de escala dinámica. Dinámica del modelo Gaussiano continuo. Dinámica con parámetro de orden conservado.
5. **Grupo de renormalización.** Efecto de un cambio de escala. Definición de la transformación del Grupo de Renormalización, variantes. GR en espacio de Fourier (*momentum shell*). GR para el modelo Gaussiano. Transformación del GR: puntos fijos, variedad crítica. Uso del GR para obtener exponentes críticos y leyes de escala. GR en forma diferencial, funciones  $\beta$ . Estabilidad del punto fijo Gaussiano. GR del modelo de Landau-Ginzburg. Desarrollo en  $\epsilon = 4 - d$ .
6. **Excitaciones en sólidos.** Aproximación de Born-Oppenheimer. Vibraciones: teoría cuántica del cristal armónico. Contribución vibracional al calor específico. Medio elástico continuo. Inexistencia de sólidos en  $d < 3$ . Segunda cuantificación: gases ideales cuánticos, operadores de uno y dos cuerpos. Vibraciones en segunda cuantificación: fonones. Modelo de Heisenberg cuántico: transformación de Holstein-Primakoff, magnones.

## Bibliografía

- Altland A. y Simons B. (2010), *Condensed Matter Field Theory*, Cambridge University Press, second ed.
- Ashcroft N.W. y Mermin N.D. (1976), *Solid State Physics*, Cengage Learning.
- Balian R. (1991), *From Microphysics to Macrophysics II*, vol 2, Springer.
- Bender C.M. y Orszag S.A. (1978), *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York.
- Bialek W., Cavagna A., Giardina I., Mora T., Silvestri E., Viale M. y Walczak A.M. (2012), Statistical mechanics for natural flocks of birds. *PNAS* **109**, 4786–4791.
- Binney J.J., Dowrick N.J., Fisher A.J. y Newman M.E.J. (1992), *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*, Clarendon Press.
- Cardy J. (1996), *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*, Cambridge University Press.
- Goldenfeld N. (1992), *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Perseus Books, Reading, Massachusetts.
- Huang K. (1987), *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, second ed.
- Kardar M. (2007), *Statistical Physics of Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1 edition ed.
- Khomskii D.I. (2010), *Basic Aspects of the Quantum Theory of Solids: Order and Elementary Excitations*, Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 1st ed.
- Le Bellac M. (1991), *Quantum and Statistical Field Theory*, Clarendon Press, Oxford.
- Parisi G. (1998), *Statistical Field Theory*, Westview Press.
- Priestley M.B. (1981), *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press.
- Schneidman E., Berry M.J., Segev R. y Bialek W. (2006), Weak pairwise correlations imply strongly correlated network states in a neural population. *Nature* **440**, 1007–1012.
- Sethna J.P. (2006), *Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters and Complexity*, Oxford University Press, Oxford.
- Sveshnikov A.G. y Tikhonov A.N. (1971), *The Theory of Functions of a Complex Variable*, Mir, Moscow.
- van Kampen N.G. (2007), *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Elsevier, third ed.

# Mecánica Estadística II

## Programa detallado

Prof. Tomás S. Grigera

### I. Energías libres y transiciones de fase.

- I.1 Formulación de la Mecánica Estadística: enfoque ergódico y teorema de Liouville; enfoque de teoría de la información. Entropía de Shannon. Distintas expresiones para la entropía. Convexidad de la entropía. Límite termodinámico.
- I.2 Energías libres. Energías libres de Helmholtz y Gibbs. Caso de sistemas magnéticos. Distribución de probabilidad del parámetro de orden y relación con la energía libre. Convexidad de las energías libres.
- I.3 Susceptibilidad. Teorema de fluctuación-disipación estático. Fluctuaciones de la magnetización extensiva e intensiva. Susceptibilidad y energía libre.
- I.4 Correlaciones espaciales. Función de correlación y función de correlación conectada. Relación con la susceptibilidad y ley de escala de Fisher.
- I.5 Transiciones de fase. Singularidades de la energía libre. Cambio de convexidad de la entropía e inestabilidad respecto de la formación de fases heterogéneas. Transición de fase y límite termodinámico: teoremas de Yang y Lee.
- I.6 Ruptura espontánea de simetría. Rotura explícita por campo externo y orden de los límites  $h \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Estados puros y propiedad de *clustering*. Ruptura de ergodicidad. Efecto de las condiciones de contorno.

### II. Modelos de red clásicos

- II.1 Panorámica: Ising,  $O(n)$  y Heisenberg/ $XY$ ,  $S$ -spin,  $p$ -spin, modelos esféricos, Potts, espines blandos (Gaussiano, Landau-Ginzburg).
- II.2 Modelo de Ising. Solución de campo medio: teoría de Weiss y formulación variacional. Observación de ruptura espontánea de simetría por descomposición en estados puros.
- II.3 Modelo de Ising sobre el grafo completamente conectado: exponentes críticos y ruptura de simetría (por estados puros y mediante un campo que tiende a cero en el límite termodinámico).
- II.4 Modelo de Ising en una dimensión. Ausencia de transición. Solución por matrices de transferencia. Funciones de correlación espacial.
- II.5 Modelo  $p$ -spin ferromagnético. Solución para el caso completamente conectado. Caso  $p = 3$ : transición discontinua.
- II.6 Metaestabilidad. Caso de campo medio y espinodal termodinámica. Dimensión finita: nucleación homogénea y ruptura de ergodicidad. Espinodal cinética. Histéresis.
- II.7 Ecuación de estado y construcción de Maxwell.
- II.8 Coexistencia de fases. Casos de control con variable intensiva (campo, presión) y extensiva (magnetización, volumen). Heterogeneidad espacial y temporal (flip-flop).
- II.9 Modelo Gaussiano. Divergencia de  $\chi$ . Correlaciones de dos puntos. Correlaciones de orden superior: función generatriz de correlaciones conectadas y no conectadas. Relación con cumulantes. Teorema de Wick.
- II.10 Resumen de exponentes críticos de campo medio. Funciones de correlación en campo medio (“tram-pita” FDT).

### III. Teoría estadística de campos.

- III.1** Introducción: ¿por qué teorías de campos? Coarse-graining heurístico: Landau-Ginzburg.
- III.2** Funcionales. Derivadas funcionales. Integral funcional y problema de convergencia para fluctuaciones de corta longitud de onda. Longitud de corte (*cut-off*).
- III.3** Aproximación de Landau (punto de ensilladura). Exponentes críticos.
- III.4** Teoría Gaussiana. Solución completa. Evaluación de la integral funcional Gaussiana. Funciones de correlación.
- III.5** Análisis dimensional de L-G. Resumen de exponentes críticos de Landau, Gaussiana, análisis dimensional.
- III.6** Corrección a la aproximación de Landau por fluctuaciones hasta segundo orden. Criterio de Guinzburg.
- III.7** Desarrollo perturbativo. Funciones de correlación en espacio de Fourier, reglas diagramáticas a partir de contracciones de Wick. Desarrollo de la función de partición y su logaritmo: diagramas conectados.
- III.8** Ecuación de Dyson y autoenergía. Desarrollo de la transformada de Legendre de  $\log Z$ : funciones vértice y diagramas irreducibles. Desarrollo en loops. Cálculo de  $T_c$  a un loop.

#### IV. Dinámica de equilibrio

- IV.1** Dinámica transitoria y estacionaria. Procesos estocásticos. Procesos estocásticos completamente estacionarios y estacionarios de orden  $n$ .
- IV.2** Ecuación de Langevin para la partícula Browniana y para el oscilador armónico. Límite sobreamortiguado del oscilador armónico. Primer FDT.
- IV.3** Ecuación de Langevin generalizada, sobreamortiguada. Ecuación de Langevin con memoria.
- IV.4** Procesos de Markov. Ecuación maestra. Ecuación de Fokker-Planck.
- IV.5** Segundo teorema de fluctuación-disipación.
- IV.6** Dinámica del modelo gaussiano. Relación de dispersión. Tiempo de relajación.
- IV.7** Dinámica crítica. Ley de escala dinámica.
- IV.8** Dinámica con parámetro de orden conservado.

#### V. Grupo de renormalización.

- V.1** Introducción. Efecto del cambio de escala (discusión cualitativa). Renormalización vs. grupo de renormalización.
- V.2** Definición de la transformación del GR. Variantes. GR en espacio real, momentum shell.
- V.3** GR del modelo Gaussiano.
- V.4** Transformación del GR en general: puntos fijos y variedad crítica. Uso del GR para obtener exponentes críticos y leyes de escala.
- V.5** Transformación del GR en forma diferencial, funciones  $\beta$ . Estabilidad del punto fijo gaussiano. Exponentes del modelo Gaussiano para  $d > 4$ . Variables irrelevantes peligrosas.
- V.6** GR del modelo de Landau-Ginzburg. Obtención de la transformación del GR perturbativamente a un loop.
- V.7** Desarrollo en  $\epsilon$ . Funciones  $\beta$  y punto fijo de Wilson-Fisher. Cálculo del exponente  $\nu$  a  $O(\epsilon)$ . Flujo del GR.
- V.8** Irrelevancia del acoplamiento  $\phi^6$  en  $d < 6$ .

#### VI. Excitaciones en sólidos.

- VI.1** Sólidos. Aproximación de Born-Oppenheimer.
- VI.2** Vibraciones en sólidos. Aproximación armónica. Diagonalización espacial: modos acústicos y modos ópticos. Diagonalización del Hamiltoniano armónico cuántico.
- VI.3** Calor específico a baja temperatura. Modelo de Debye.
- VI.4** Límite continuo: teoría de campos del medio elástico. Inexistencia de sólidos en  $d < 3$ . Teoría cuántica del medio elástico continuo.

- VI.5** Segunda cuantificación (repaso/resumen). Inconvenientes causados por el postulado de simetrización. Espacio de Fock y gases ideales cuánticos (Bose-Einstein y Fermi-Dirac). Operadores  $a$  y  $a^\dagger$  y bases en el espacio de Fock. Cambio de base. Representación de operadores de uno y dos cuerpos en segunda cuantificación.
- VI.6** Hamiltoniano del cristal armónico como Hamiltoniano en segunda cuantificación: fonones. Fonones localizados y deslocalizados.
- VI.7** Modelo de Heisenberg cuántico. Estado fundamental ferromagnético y antiferromagnético. Transformación de Holstein-Primakoff y diagonalización en el límite  $S \gg 1$ : magnones. Espectro de magnones ferro (y antiferro pero en 2020 no lo di).