Mecánica Estadística II

Año 2020

Prof. T. S. Grigera
JTP N. Nessi

Práctica 5 — Grupo de renormalización

Ejercicio 1. GR para el modelo Gaussiano.

a) Aplique la transformación del GR en espacio k al modelo Gaussiano con campo aplicado uniforme y muestre que el campo y las constantes de acoplamiento se transforman según

$$\mu_{l+1}^2 = b^2 \mu_l^2, \tag{5.1}$$

$$\phi_{l+1}(k) = b^{-1-d/2} \phi_l(k/b), \tag{5.2}$$

$$h_{l+1} = b^{1+d/2} h_l. \tag{5.3}$$

b) Considere ahora agregar el término $\frac{\lambda}{4!} \int d^x \, \phi^4(x)$ del modelo de Landau-Guinzburg. Dado que la renormalización del modelo Gaussiano no generó términos proporcionales a $\phi^4(x)$, podemos suponer que $\lambda = 0$ es un punto fijo del modelo L-G. Muestre que este punto fijo es inestable para $d < 4$ (obtenga el flujo de λ sin considerar las contribuciones perturbativas, es decir en torno al PF $\lambda = 0$).

Ejercicio 2. Leyes de escala.

a) Considere una transformación de GR para un modelo con una dirección irrelevante u y dos relevantes t y h, y deduzca a partir de ella las leyes de escala para la parte singular de la energía libre y para las correlaciones espaciales del parámetro de orden,

$$C(k; t, u) = k^{d-2d_\phi^*} G(k t^{1/d_t}), \tag{5.4}$$

$$f_s(t, h) = |t|^{d/d_t} g\left(h t^{-d_h/d_t}\right). \tag{5.5}$$

b) Utilice estos resultados para obtener los exponentes críticos del modelo Gaussiano.

Ejercicio 3. GR para el modelo de Landau-Guinzburg. Estudie el flujo del GR a 1 loop para el modelo L-G,

$$\mu_{l+1}^2 = b^2 \left[\mu_l^2 + \lambda_l \frac{\Lambda^{d-2}}{16\pi^2} \left(1 - \frac{\mu_l^2}{\Lambda^2}\right) \log b \right], \tag{5.6}$$

$$\lambda_{l+1} = b^\epsilon \left[\lambda_l - \lambda_l^2 \frac{3\Lambda^{d-4}}{16\pi^2} \left(1 - \frac{2\mu_l^2}{\Lambda^2}\right) \log b \right]. \tag{5.7}$$

a) Calcule las funciones β y encuentre los puntos fijos del GR.

b) Diagonalice el flujo en torno a ambos puntos fijos y estudie la estabilidad de los mismos en función de la dimensión espacial. Muestre que el autovector de la dirección relevante (llamémoslo $\boldsymbol{v}_t$) es paralelo al eje μ^2, mientras que el de la dirección irrelevante ($\boldsymbol{v}_u$) es una combinación lineal de las direcciones de λ y μ^2. A partir de esa información dibuje un diagrama aproximado del flujo.

c) Llamemos y_t e y_u a las dimensiones de escala de las direcciones relevante e irrelevante (que Ud. ha calculado a $O(\epsilon)$ en el inciso anterior). Partiendo de acoplamientos físicos μ_0 y λ_0 cercanos a la variedad crítica, muestre, aplicando reiteradamente la transformación del GR, que la dependencia de ξ con $t = \mu_0^2 - \mu_c^2(\lambda_0)$ es de la forma

$$\xi \sim t_0^{-1/y_t} \left[1 + A t_0^{-y_u/y_t} + \dots \right], \tag{5.8}$$

donde aparece un exponente de *crossover* $\phi = -y_u/y_t$ (¿qué signo tiene?).

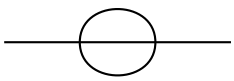
d) A partir de lo anterior muestre que a $O(\epsilon)$ se encuentra para los exponentes de escala de función de correlación

$$\nu = \frac{1}{2} + \epsilon 12 + O(\epsilon^2), \tag{5.9}$$

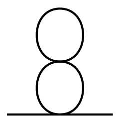
$$\eta = O(\epsilon^2). \tag{5.10}$$

Ejercicio 4. *Dimensión anómala.* Muestre que incluyendo en la transformación del GR del modelo L-G los diagramas hasta dos loops aparece una corrección perturbativa a la dimensión de escala del campo, y por lo tanto una primera corrección al exponente η (dimensión anómala). Puede trabajar directamente a $\mu^2 = \mu_c^2$.

Note que el diagrama relevante es el "saturno", puesto que el "cactus" amputado no depende de k.



saturno



cactus