Mecánica Estadística II

Año 2020

Prof. T. S. Grigera
JTP N. Nessi

Práctica 4 — Dinámica de equilibrio

Ejercicio 1. Ecuación de Langevin para el oscilador armónico. Estudie la ecuación

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = \xi(t), \qquad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2T\eta\delta(t-t'). \tag{4.1}$$

a) Muestre que la función de Green de la ecuación es

$$G(t,t_0) = \Theta(t-t_0)\frac{e^{-\gamma(t-t_0)}}{m\hat{\omega}} \operatorname{sen}\hat{\omega}(t-t_0), \tag{4.2}$$

con $\gamma = \eta/2m$, $\hat{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

b) Utilice la función de Green para calcular la función de correlación en el límite $t_0 \to \infty$ y obtenga

$$C(t_0+t, t_0) = \frac{T}{k} e^{-\gamma t}\left[\cos\hat{\omega}t + \frac{\gamma}{\hat{\omega}}\operatorname{sen}\hat{\omega}t\right], \tag{4.3}$$

o bien

$$C(t_0+t, t_0) = \frac{T}{k} e^{-\gamma t}\left[\cosh\tilde{\omega}t + \frac{\gamma}{\tilde{\omega}}\operatorname{senh}\hat{\omega}t\right], \tag{4.4}$$

con $\tilde{\omega} = i\hat{\omega}$ (esta segunda expresión es más útil en el caso sobreamortiguado $\gamma^2 > \omega_0^2$).

c) Muestre que en el límite sobreamortiguado $\omega_0^2/\gamma^2 \to 0$ la función de Green y la correlación tienden a

$$G_s(t,t_0) = \Theta(t-t_0)\frac{e^{-kt/\eta}}{\eta}, \tag{4.5}$$

$$C(t) = \frac{T}{k}e^{-kt/\eta}, \tag{4.6}$$

cuando el tiempo adimensional $\hat{t} = kt/\eta$ es finito. Observe que $G_s(t,t_0)$ es la función de Green de la ecuación de Langevin sin masa,

$$\eta\dot{x} = -kx + \xi(t). \tag{4.7}$$

Ejercicio 2. Procesos de Markov.

a) Para el *proceso de Wiener,* definido por

$$P_1(x,0) = \delta(x), \tag{4.8}$$

$$T_t(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x_2-x_1)^2/2t}, \tag{4.9}$$

muestre que satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov, y que no es estacionario ya que $P_1(x,t) = e^{-x^2/2t}/\sqrt{2\pi t}$. Este proceso corresponde a un caminante aleatorio, o bien a la *posición* de una partícula Browniana.

b) Muestre que el *proceso de Ornstein-Uhlenbeck,*

$$P_1(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \tag{4.10}$$

$$T_t(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2t})}}e^{-(x_2-x_1e^{-t})^2/2(1-e^{-2t})}, \tag{4.11}$$

es estacionario. Este proceso puede describir la dinámica de la *velocidad* de la partícula Browniana.

Ejercicio 3. Teorema de fluctuación-disipación.

a) A partir del TFD, derive la relación

$$\chi''(\omega) = \frac{\beta}{2}\omega C'(\omega), \tag{4.12}$$

donde $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) = \int dt\, e^{i\omega t} R(t)$ y análogamente para la función de correlación temporal $C(t)$. Esta es la forma en que suele escribirse el TFD en dominio de frecuencia, relacionando la función de correlación con la parte disipativa de la respuesta.

b) ¿Qué forma tiene la correlación cuando χ' es independiente de la frecuencia? ¿Cuánto vale χ'' en ese caso? *Ayuda:* recuerde las relaciones de Kramers-Kronig.

c) Utilice (4.12) para escribir una relación entre las fluctuaciones de polarización eléctrica y la permitividad dieléctrica.

Ejercicio 4. Hipótesis de escala dinámica. Muestre que la hipótesis de escala

$$C(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{C(k)}{\omega_{\boldsymbol{k}}} f(\omega/\omega_{\boldsymbol{k}}; k\xi), \qquad \omega_{\boldsymbol{k}} = k^z \Omega(k\xi), \tag{4.13}$$

implica

$$C(\boldsymbol{k},t) = C(\boldsymbol{k},t=0) g(t/\tau_{\boldsymbol{k}}, k\xi), \qquad \tau_{\boldsymbol{k}} = k^{-z} h(k\xi). \tag{4.14}$$

Ejercicio 5. Dinámica de equilibrio del modelo Gaussiano.

a) Resuelva la ecuación de Langevin para el modelo Gaussiano,

$$\partial_t \phi(\boldsymbol{x},t) = \Gamma\nabla^2\phi(\boldsymbol{x},t) - \Gamma\mu^2\phi(\boldsymbol{x},t) + \xi(\boldsymbol{x},t), \qquad \langle \xi(vx,t)\xi(vx',t')\rangle = 2\Gamma\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t'). \tag{4.15}$$

Muestre que el exponente crítico dinámico es $z = 2$.

b) Verifique que la solución cumple el teorema de fluctuación-disipación, y que contiene a la correlación estática $C(k)$ obtenida anteriormente.

c) Observe que para $\mu^2 = 0$ la ecuación se reduce (aparte del término de ruido) a la ecuación de difusión. ¿Es la dinámica de difusión una dinámica crítica? ¿Por qué?

d) Estudie la dinámica del modelo Gaussiano con para el caso de parámetro de orden conservado y muestre que el exponente crítico dinámico en este caso es $z = 4$.