Mecánica Estadística II

Año 2020

Prof. T. S. Grigera
JTP N. Nessi

Práctica 3 — Teorías de campos en física estadística

Ejercicio 1. Sabiendo que el funcional de Landau-Gunizburg

$$\beta\mathcal{H}_{LG} = \int d^dx \left\{ |\nabla\phi|^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right\} \tag{3.1}$$

es adimensional, encuentre las dimensiones del campo y de los parámetros μ^2 y λ como potencias de la unidad de longitud L. Obtenga la forma esperada de la función de correlación a partir de un análisis dimensional.

Ejercicio 2. Estudie la formación de interfases en un sistema con parámetro de orden escalar en la aproximación de Landau (Kardar, 2007, §2.5). Muestre que imponiendo que los bordes tengan magnetización opuesta, $\phi(x \to -\infty) = -\phi(x \to \infty) = \phi_0$ (donde ϕ_0 es la magnetización espontánea de la aproximación de Landau), el campo debe cumplir

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \mu^2\phi + \frac{\lambda}{6}\phi^3, \tag{3.2}$$

y que la solución a esa ecuación es

$$\phi(x) = \phi_0 \tanh\bigl[(x - x_0)/w\bigr], \tag{3.3}$$

donde el ancho $w = \sqrt{-2/\mu^2}$ es proporcional a la longitud de correlación ξ, y por lo tanto diverge al aproximarse a la temperatura de transición. Por último, calcule el costo de energía libre asociado a la formación de la interfase (energía libre superficial) y muestre que la energía libre superficial por unidad de área es proporcional al ancho de la interfase.

Ejercicio 3. Estudie la teoría ϕ^6,

$$\beta\mathcal{H}_{LG} = \int d^dx \left\{ |\nabla\phi|^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\omega}{6!}\phi^6 \right\}, \tag{3.4}$$

en la aproximación de Landau. En este caso, $\omega > 0$ garantiza la estabilidad de la energía libre, de modo que tanto μ^2 como λ pueden cambiar de signo. Muestre que hay una transición de segundo orden para $\lambda > 0$ y de primer orden para $\lambda < 0$. El punto $\lambda = \mu^2 = 0$ donde la transición pasa de ser de segundo orden a ser de primer orden se denomina *punto tricrítico.* Calcule allí los exponentes críticos.

Ejercicio 4. Calcule la función de correlación espacial en la teoría Gaussiana. Obtenga primero la expresión en espacio de Fourier en dimensión genérica,

$$C(k) = \frac{1}{k^2 + \mu^2}, \tag{3.5}$$

y a partir de ella expresiones explícitas para $C(r)$ en $d = 1$ y $d = 3$.

Ejercicio 5. Escriba los diagramas de Feynman y sus correspondientes expresiones analíticas (incluyendo los factores de simetría) para la contribución de $O(\lambda^2)$ a $G_c^{(2)}(k)$.

Ejercicio 6. Calcule la temperatura crítica del modelo de Landau-Guinzburg a dos loops.