Mecánica Clásica

Año 2019

Prof. T. S. Grigera

Práctica 5 — Cuerpo rígido

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) Grados de libertad de un cuerpo rígido. Descomposición de desplazamiento en desplazamiento de un punto de referencia y rotación en torno a ese punto.

b) Rotaciones: composición, no conmutatividad y linealidad. Representación matricial. Propiedades de las matrices de rotación, existencia de un *eje* de rotación.

c) Velocidad angular y movimiento relativo de rotación. Transformación de velocidades y aceleraciones.

d) Movimiento de rototraslación: posibilidad de descomposición en dos ecuaciones independientes para traslación y rotación. Unicidad de la velocidad angular.

e) Momento angular y energía cinética del cuerpo rígido. Tensor de inercia y momento de inercia. Ejes principales de inercia. Teorema de Steiner. Separación de momento angular y energía cinética en componentes de rotación y traslación.

f) Ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido: ecuaciones de Euler (rotación general en torno al centro de masa). Caso de eje de rotación coincidente con un eje principal de inercia. Caso de eje de rotación que no pasa por el centro de masa.

Bibliografía: Goldstein et al. (2001, caps. 4, 5), Landau y Lifshitz (1976, cap. VI), Alonso y Finn (1970, cap. 6), Zypman (1990).

Ejercicio 1. La operación de rotar un cuerpo rígido consiste en transformar su conformación de modo de dejar un punto fijo.

a) Muestre que en un sistema de referencia adecuado, una rotación es una transformación lineal de vectores que conserva su módulo.

b) Demuestre que esta propiedad implica que $G^T G = \mathbb{1}$, o bien $\det^2 G = 1$.

c) Demuestre que toda matriz de rotación de determinante $+1$ (es decir, excluyendo las inversiones de ejes) tiene un autovector con autovalor 1 si la dimensión del espacio es impar. Se sigue que cualquier rotación en tres dimensiones deja sin transformar a toda una línea de puntos, el *eje de rotación.*

Ejercicio 2. Demuestre que para un cuerpo rígido moviéndose con un punto fijo, la razón de cambio de la energía cinética se puede escribir

$$\frac{dK}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau}. \tag{5.1}$$

Ejercicio 3. Partiendo de que la derivada del momento angular es igual al torque externo, obtenga las ecuaciones de Euler para el movimiento del cuerpo rígido.

Ejercicio 4. Considere la puerta de un auto (supóngala una plancha rectangular), en posición abierta (es decir a 90° respecto del auto). Si el auto está en reposo y arranca con aceleración constante a, la puerta se cerrará. Calcule el tiempo que tardará en cerrarse completamente en función del momento de inercia de la puerta y de la distancia entre su centro de masa y la bisagra.