Mecánica Clásica
Año 2019

Prof. T. S. Grigera

Práctica 4 — Problemas de uno y dos cuerpos. Problema de Kepler

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) Movimieto en una dimensión. Período y energía potencial.

b) El problema de dos cuerpos. Masa reducida.

c) Movimiento en un campo central. Segunda ley de Kepler. Expresión para la trayectoria. Condición para órbita cerrada.

d) El problema de Kepler. Forma de la órbita para energía total positiva y negativa (casos libre y ligado). Primera ley de Kepler.

Bibliografía: Landau y Lifshitz (1976, §14 y 15).

Ejercicio 1. Dé una expresión exacta para el período de un péndulo simple (es decir, sin hacer la aproximación armónica).

Ejercicio 2. Péndulo esférico. El péndulo esférico es una masa que puede moverse sobre una superficie esférica de radio L bajo la acción de un campo gravitatorio (o bien, un péndulo simple en donde las condiciones iniciales son tales que el movimiento no está confinado a un plano).

a) Escriba el Lagrangiano utilizando coordenadas esféricas. Si elige el eje polar de modo que apunte hacia abajo en la dirección vertical deberá obtener

$$L = \frac{1}{2} m L^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + mgL\cos\theta. \tag{4.1}$$

b) Observe que la coordenada ϕ es cíclica, de modo que se conserva su momento conjugado P_ϕ. Muestre que éste conicide con la componente vertical del momento angular,

$$L_z = P_\phi = mL^2 \sin^2\theta\dot{\phi}. \tag{4.2}$$

c) Utilizando esta conservación y la de la energía, escriba la ecuación de la trayectoria en la forma

$$\phi = \frac{L_z}{L\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E - U_{\text{eff}}(\theta)}}, \tag{4.3}$$

dando una expresión apropiada para el potencial efectivo $U_{\text{eff}}(\theta)$.

d) Escriba la ecuación que para los límites en θ del movimiento. ¿En qué condiciones el límite inferior para θ es 0 (correspondiente al polo de la esfera, o bien a la altura mínima permitida a la masa por el vínculo esférico)?

Ejercicio 3. Encuentre la ecuación de las trayectorias en el problema de Kepler atractivo y muestre que son elipses para $E < 0$ e hipérbolas para $E > 0$. Para el caso de elipses, muestre que uno de los focos coincide con el origen del campo central.

Ejercicio 4. Considere el problema de Kepler repulsivo ($U = \alpha/r$ con $\alpha > 0$).

a) Demuestre que la energía tiene que ser siempre positiva y por lo tanto el movimiento resulta no acotado.

b) Muestre que la trayectoria es hiperbólica.

c) Calcule la distancia de mayor acercamiento al origen del campo (perihelio).