Prof. T. S. Grigera

Práctica 2 — Principio de mínima acción y cálculo de variaciones

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) Grados de libertad. Vínculos: vínculos holonómicos y anholonómicos. Coordenadas generalizadas.

b) Función Lagrangiana como descripción de un sistema mecánico. Acción. Principio de Hamilton.

c) Funcionales. Variación para una funcional integral. Variación para una funcional general. Minimización de una funcional.

d) Minimización de la acción. Ecuaciones de Lagrange. Identidad de Beltrami.

Bibliografía: Goldstein et al. (2001, §I.3, II.1–3), Landau y Lifshitz (1976, §I.1–2).

Ejercicio 1. Demuestre que la curva más corta que une dos puntos dados es una línea recta. *Nota:* La idea de este ejercicio es aplicar la ecuación de Lagrange a un caso simple, pero existe una demostración más sencilla basada en la desigualdad triangular que no requiere del cálculo variacional.

Ejercicio 2. Problema de la curva braquistócrona. La curva braquistócrona, o curva del tiempo más corto, es la curva de descenso más rápido entre dos puntos para una partícula que se mueve bajo la acción de la aceleración de la gravedad (sin fricción) y partiendo del reposo. Suponiendo que la partícula parte del origen y llega al punto $(x_0, -y_0)$ (con $y_0 > 0$), encuentre la ecuación de la curva braquistócrona, es decir la forma que debería tener una pista sin fricción para conducir a la partícula lo más rápidamente posible al punto final. Verá Ud. que el camino más veloz *no es* el más corto (es decir, la braquistócrona no es una línea recta, o bien, la pista óptima no es un plano inclinado).

a) Para resolver el problema, primero debe expresar el tiempo T que tarda la partícula en ir de un punto a otro como una funcional de la curva $y(x)$ que describe la trayectoria (forma de la pista) buscada. Recuerde que la longitud de arco se puede escribir $ds = |dx|\sqrt{1+y'^2}$ o bien $ds = |dy|\sqrt{1+x'^2}$, o bien, si la curva está descripta paramétricamente, como $ds = |\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt$, es decir $ds = vdt$ si el parámetro es el tiempo. Escriba entonces

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{ds}{v}. \tag{2.1}$$

b) Utilice el principio de conservación de la energía para expresar la rapidez en función de la altura. Podrá entonces expresar el tiempo como una funcional de $y(x)$, o de $x(y)$:

$$T[y(x)] = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}}\,dx, \tag{2.2}$$

$$T[x(y)] = \int_{-y_0}^{0} \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{-2gy}}\,dy. \tag{2.3}$$

c) Ahora minimice la funcional utilizando la ecuación de Lagrange. En el primer caso el integrando es una función $f(y, y')$ pero no de la variable independiente x, en el segundo es una función $f(x', y)$, es decir que depende de la variable independiente pero no de la función $x(y)$, sino sólo de la derivada. El segundo caso conduce a una ecuación de Lagrange más sencilla; en caso de aplicar la ecuación de Lagrange al primer funcional conviene utilizar la identidad de Beltrami. Por cualquiera de las dos vías podrá mostrar que la curva braquistócrona debe cumplir la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{1}{2gC^2y} - 1, \tag{2.4}$$

donde C es una constante a determinar. Esta es la ecuación de una *curva cicloide* convexa hacia arriba y de radio $1/4Cg$.

d) Integrando (2.4) o bien la ecuación obtenida para $x'(y)$ a partir del funcional (2.3), exprese la solución en forma paramétrica:

$$x(t) = \frac{1}{4Cg}\left(2g\sqrt{C}t - \sin 2g\sqrt{C}t\right), \tag{2.5}$$

$$y(t) = \frac{1}{4Cg}\left(\cos 2g\sqrt{C}t - 1\right). \tag{2.6}$$

Ejercicio 3. Deduzca las ecuaciones del movimiento (ecuaciones de Lagrange) a partir del principio de Hamilton y suponiendo un Lagragiano general $L(q_i, \dot{q}_i, t)$.

Ejercicio 4. Muestre que si dado un Lagragiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, se define otro por $K(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + df/dt$, donde $f(q_i, t)$ es una función diferenciable cualquiera que depende sólo del tiempo y las coordenadas generalizadas, las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de $K(q_i, \dot{q}_i, t)$ son idénticas a las que se obtienen de $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. En otras palabras, el Lagrangiano de un sistema mecánico no es único.

***Ejercicio 5.** Entre todas las curvas planas cerradas de longitud L, encuentra aquella que encierra el área mayor.