SISTEMAS DE COORDENADAS Y ÁLGEBRA VECTORIAL

TOMÁS S. GRIGERA

Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos (IFLYSIB), CONICET y Universidad Nacional de La Plata, Calle 59 no. 789, La Plata

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Calle 49 y 115, La Plata

RESUMEN. Estas notas contienen un resumen de los conceptos de álgebra vectorial y sistemas de coordenadas necesarios para desarrollar los contenidos de la asignatura Física General I de la Lic. en Física. Se distribuyen como una guía de contenidos y de referencia rápida, pero no reemplazan a un libro de texto; en particular carecen de ejercicios y casi por completo de ejemplos. Para ampliar lo aquí desarrollado y encontrar ejemplos y ejercicios puede consultarse por ejemplo el clásico texto de Luis A. Santaló, *Vectores y tensores con sus aplicaciones* (Santaló, 1961).

1. Sistema de referencia y sistema de coordenadas

Cuando un observador O desea comunicar una información tal como la posición o la velocidad de una partícula a otro observador O', es evidentemente necesario que ambos acuerden cuál será la referencia u origen respecto del cual se indicarán tales posiciones. Todas las medidas se darán entonces respecto de un *sistema de referencia (SR)* determinado. Cada observador preferirá probablemente elegir un SR en reposo (o, más precisamente, un SR tal que respecto de éste su propia posición resulte independiente del tiempo). En tal SR (llamémoslo O), puede resultar que la posición del otro observador (y por la tanto su SR "favorito" O') *NO* sea independiente del tiempo, es decir que O' se mueva respecto de O. Esto no es importante a los efectos de comunicar la posición de una partícula entre O y O': lo importante es que ambos sepan respecto de cuál SR se está indicando la posición.

Más adelante veremos cómo traducir una posición o velocidad expresada respecto de O a otro SR en movimiento respecto de O. Por el momento podemos suponer que O está "en reposo," es decir que nuestra propia posición no varía con el tiempo si la medimos respecto de O.

Date: Marzo de 2017.

Una vez establecido cuál será el SR que usaremos, será necesario indicar posiciones (respecto de O) en el espacio tridimensional. Para poder hacer esto necesitaremos además de un punto de referencia, establecer una convención respecto de como se medirán desplazamientos en distintas orientaciones respecto de O: para eso será necesario elegir, además del SR, un *sistema de coordenadas (SC).*

El sistema de ejes cartesianos es quizás el SC más conocido, y el que utilizaremos casi siempre, pero no es el único posible. Además, dado un origen, aún cuando resolvamos usar un SC cartesiano, queda todavía la libertad de elegir la orientación de los ejes cartesianos. Vemos así que aún elegido el SR tenemos múltiples (de hecho infinitas) opciones para elegir un SC.

Concluimos entonces que para medir o comunicar una posición o una velocidad, es necesario previamente elegir un sistema de referencia y un SC. Si la medida de una posición no está acompañada del conocimiento de cuáles han sido el SR y SC en donde han sido determinadas, la información carece de sentido.

2. Vectores y escalares

Al tratar de cuantificar el movimiento de los cuerpos y estudiar las leyes que lo rigen, veremos que nos encontraremos con dos tipos de magnitudes.

Cantidades tales como la posición, el desplazamiento y la velocidad, que involucran la noción de orientación (o dirección), serán expresadas, como hemos dicho, en un dado SR y con algún SC, que supondremos cartesiano. Es más o menos obvio que si se realiza la medida en el mismo SR pero con otro SC (por ejemplo, otro sistema cartesiano con los ejes rotados 45 grados respecto del primero), los valores (coordenadas) que se obtendrán al realizar la medida serán otros, aunque se refieran al mismo cuerpo. Llamaremos *magnitudes vectoriales* a este tipo de cantidades, que requieren ser recalculadas al cambiar SC (aún sin haber cambiado SR). Diremos que un vector se *transforma* al cambiar SC (por ejemplo, al rotar los ejes cartesianos). Los vectores se pueden representar geométricamente como segmentos de recta orientados.

Nos encontraremos también con otro tipo de cantidades, como la distancia, que se expresarán con igual valor numérico en cualquier SC. Estas se denominan *magnitudes escalares.* Las magnitudes escalares no sufren transformación alguna (es decir, su valor numérico sigue siendo el mismo) al cambiar de SC (con el mismo SR).

3. Representación de escalares y vectores

Las magnitudes escalares se expresan con un número real o complejo (aunque no nos ocuparemos de escalares complejos en este curso). Tratándose de una magnitud física, el número estará acompañado por una *unidad de medida,* por ejemplo

$$\text{distancia} = d = 23{,}5\,\text{km} = 23{,}5 \cdot 10^3\,\text{m}. \tag{1}$$

Lo que estamos haciendo en definitiva es expresar la magnitud escalar como un *producto* de un número real por una unidad de medida: el producto del ejemplo indica que la distancia medida es igual a 23,5 veces la unidad de medida (en este caso el kilómetro).

Para expresar una magnitud vectorial es necesario, como hemos dicho, elegir previamente un SC. Seguramente el sistema de coordenadas cartesianas nos es familiar para indicar posiciones de puntos en un plano: se traza una línea paralela

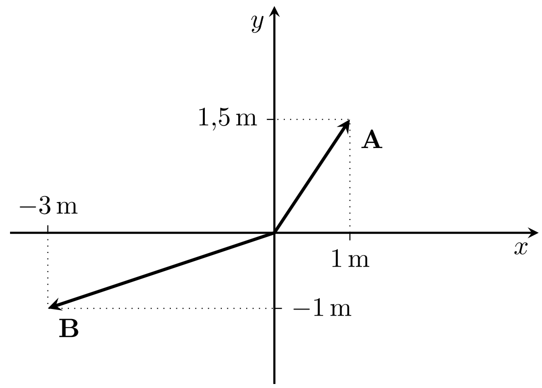


FIGURA 1. Representación de los vectores $\mathbf{A} = (1, 1{,}5)\,\mathrm{m}$ y $\mathbf{B} = (-3, -1)\,\mathrm{m}$ en un sistema de coordenadas cartesianas en dos dimensiones.

a uno de los ejes (digamos el eje Y) que pase por el punto deseado y se busca la intersección con el otro eje (en este caso el X): el desplazamiento[1] del punto de intersección respecto del origen es la *coordenada* sobre el respectivo eje (ver fig. 1). Intersectando el eje Y con una recta paralela al eje X se encuentra la coordenada Y. En tres dimensiones el procedimiento es similar pero la recta que pasa por el punto e intersecta el eje debe ser paralela al *plano* definido por los otros dos ejes.

Un vector se expresa entonces utilizando dos (en el plano) o tres (en el espacio) coordenadas (o *componentes*), cada una con sus respectivas unidades. El segmento orientado que corresponde al vector dado es el que va desde el origen de coordenadas al punto designado por las componentes del vector. Cuando utilicemos coordenadas cartesianas escribiremos

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \tag{2a}$$

o bien

$$\mathbf{A} = A_x\breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{j}} + A_z\breve{\mathbf{k}}. \tag{2b}$$

La notación con par (o terna) ordenada es equivalente a la segunda forma (con los llamados *versores* $\breve{\mathbf{i}}$, $\breve{\mathbf{j}}$, $\breve{\mathbf{k}}$), cuyo sentido explicaremos en §7. Las coordenadas o componentes A_x, A_y, A_z incluyen una unidad de medida:

$$\mathbf{B} = (2\,\mathrm{m}, 1{,}9\,\mathrm{m}), \qquad \mathbf{C} = (2\,\mathrm{m}, 75\,\mathrm{cm}),$$
$$\mathbf{D} = (2, -0{,}75)\mathrm{m}.$$

3.1. Vectores en una dimensión. En el curso estudiaremos casos (tal como la caída libre de un cuerpo) de movimiento en los que la partícula se desplaza a lo largo de una recta. Decimos que se trata de un movimiento en una dimensión (estrictamente, de un movimiento que puede describirse como unidimensional, ya que la partícula naturalmente existe dentro de un espacio tridimensional). Si trabajamos en una dimensión, los vectores se expresarán con una sola coordenada. Sin embargo, *no dejan de ser vectores:* las magnitudes vectoriales tales como la posición

[1]El desplazamiento sobre la recta es la distancia del punto de intersección al origen multiplicada por un signo que indica si el desplazamiento es a la derecha o a la izquierda del origen.

deberán transformarse si se cambia la orientación del sistema de coordenadas. Por ejemplo, si se trata de un movimiento en dirección vertical al piso, y ponemos el origen de coordenadas en el piso, podemos elegir un sistema en el que las posiciones por encima del piso sean negativas, o uno en el cual sean positivas. Ambas opciones son válidas, pero si queremos cambiar de un sistema al otro, será necesario cambiar el signo de la coordenada para expresar la misma posición. En cambio, la distancia será en los dos casos dada por el mismo número (positivo): la distancia, como hemos dicho, es un escalar.

4. Módulo, dirección, sentido, suma, producto de vector y escalar

4.1. Módulo, dirección y sentido. El *módulo* o magnitud de un vector es la distancia del origen al extremo del vector. Se indica con barras verticales rodeando al vector ($|\mathbf{A}|$) o a veces con el mismo signo que representa al vector pero sin la negrita o la flecha superior (A). Conociendo sus componentes cartesianas, el módulo se calcula mediante el teorema de Pitágoras:

$$|\mathbf{A}| \equiv A \equiv \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{3}$$

La *dirección* del vector es la recta que pasa por el origen y contiene al vector, y el *sentido* indica la posición relativa del origen y el extremo del vector (p. ej. "dirección vertical y sentido hacia arriba"). Dirección y sentido se pueden indicar, en el plano, mediante el ángulo que forma el vector con un eje determinado (generalmente, el eje X positivo).

4.2. Suma y resta. El vector *suma* de dos vectores es aquel cuyas componentes cartesianas son iguales a la suma de las respectivas componentes de los vectores que se están sumando:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z). \tag{4}$$

La suma de vectores es conmutativa y asociativa. Gráficamente, la suma está dada por la regla del paralelogramo, o bien por el vector que va desde el origen de $\mathbf{A}$ hasta el punto dado por el extremo de $\mathbf{B}$ cuando $\mathbf{B}$ se coloca en el extremo de $\mathbf{A}$ (fig. 2). Restar dos vectores equivale a sumar el primero con el opuesto del segundo (§4.3) o bien, en coordenadas cartesianas, a restar componente a componente (véase también Santaló, 1961, §I.3).

La diferencia de vectores es útil para indicar posiciones relativas. La posición de $\mathbf{B}$ respecto del punto $\mathbf{A}$ es $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, y por lo tanto la *distancia* entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es $|\mathbf{B} - \mathbf{A}|$.

4.3. Producto de un vector y un escalar, vector opuesto. El producto de un vector y un escalar es otro vector, cuyas componentes cartesianas están dadas por las del vector original multiplicadas cada una de ellas por el escalar:

$$\mathbf{B} = p\mathbf{A} = (pA_x, pA_y, pA_z). \tag{5}$$

Se sigue que el módulo del vector producto es igual al módulo del vector original multiplicado por el valor absoluto del escalar:

$$|p\mathbf{A}| = \sqrt{p^2 A_x^2 + p^2 A_y^2 + p^2 A_z^2} = \sqrt{p^2 \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)} = |p||\mathbf{A}|. \tag{6}$$

La dirección de $p\mathbf{A}$ es igual a la dirección de $\mathbf{A}$, y el sentido es el mismo si p es positivo, o el contrario si p es negativo.

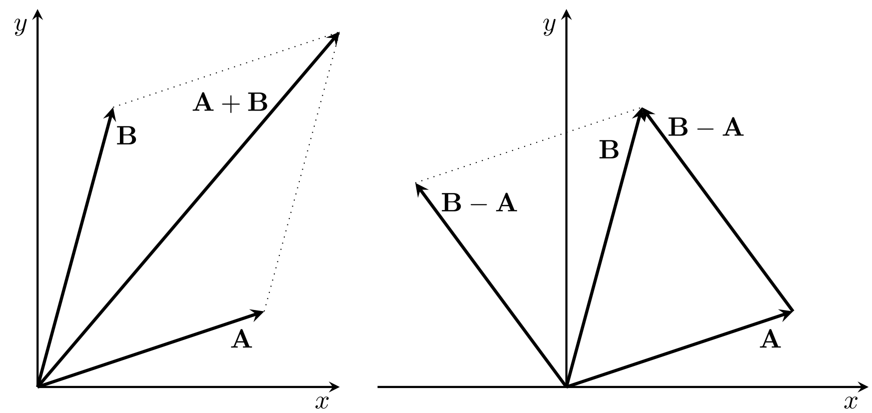


FIGURA 2. Suma y resta de vectores

Si $p = 1$ el vector producto es evidentemente igual al vector original; si $p = -1$, el vector tiene igual módulo y dirección que el vector original pero sentido contrario. El vector $-1\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ se llama *vector opuesto* a $\mathbf{A}$.

El producto por un escalar es *distributivo* respecto de la suma, tanto vectorial como escalar:

$$p(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = p\mathbf{A} + p\mathbf{B}, \tag{7}$$

$$(p + q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A}. \tag{8}$$

Véase también Santaló (1961, §I.3.4).

4.4. Vector nulo. El vector nulo es el *elemento neutro* de la suma vectorial, es decir, un vector tal que, sumado a cualquier vector, es siempre igual al vector original:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}, \qquad \forall\mathbf{A}. \tag{9}$$

Esto requiere que las componentes del vector nulo sean todas cero: $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Evidentemente el módulo del vector nulo es nulo, y el producto del escalar cero por cualquier vector es igual al vector nulo,

$$|\mathbf{0}| = 0, \tag{10}$$

$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Deducimos también que la suma de un vector y su opuesto es igual al vector nulo:

$$\mathbf{0} = (1 - 1)\mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A}. \tag{12}$$

5. Ángulos y componentes cartesianas

5.1. Coordenadas polares. Puesto que un vector queda completamente definido indicado su módulo, dirección y sentido, un vector en el plano puede especificarse dando su módulo y el ángulo que forma respecto de alguna dirección tomada como origen (fig. 3), y definir así un SC basado en módulo y orientación en lugar de desplazamientos a lo largo de ejes fijos. El sistema de *coordenadas polares* es un SC de este tipo, en el que la orientación de referencia (ángulo 0) es el eje X, y los ángulos

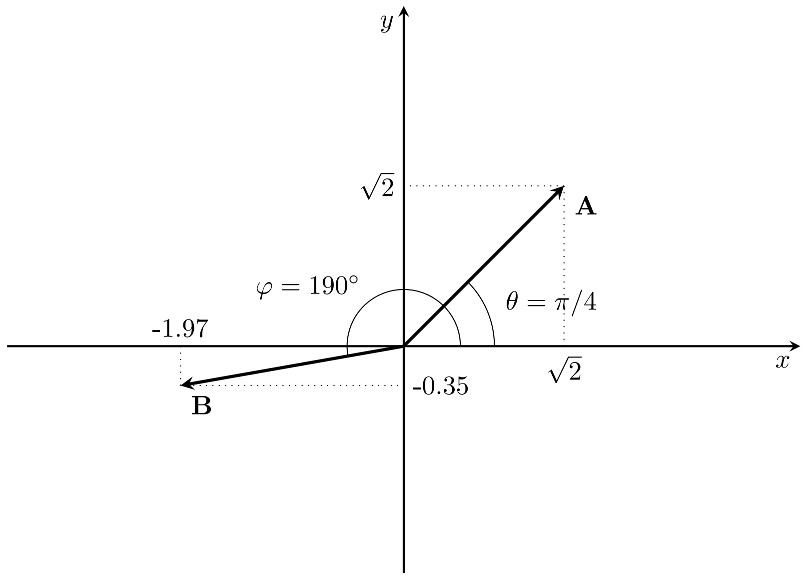


FIGURA 3. Dos vectores de módulo $2\,\mathrm{m}$ y distintas orientaciones. $\mathbf{A} = (2\,\mathrm{m}, \pi/4\,\mathrm{rad}) = (\sqrt{2}\,\mathrm{m}, \sqrt{2}\,\mathrm{m})$; $\mathbf{B} = (2\,\mathrm{m}, 190°) \approx (-1{,}97\,\mathrm{m}, -0{,}35\,\mathrm{m})$.

se consideran *positivos* cuando indican un cambio de dirección en sentido *antihorario,* y negativos en caso de cambios de dirección en sentido horario. Es posible entonces, como alternativa a las coordenadas cartesianas, especificar un vector con un par (módulo, ángulo), por ejemplo $\mathbf{A} = (3\,\mathrm{m}, 28°)$. Se puede generalizar esta idea para representar vectores en tres dimensiones, pero no emplearemos tales SC en este curso.

Los SC cartesiano y polar son equivalentes en el sentido de que ambos permiten expresar cualquier vector del plano. La elección de uno y otro se hace en función de cuál resulte más cómodo para expresar los vectores que aparecen en un problema particular. La resolución de problemas requerirá que seamos capaces de obtener las componentes cartesianas de un vector a partir de sus coordenadas polares y viceversa. Las funciones trigonométricas elementales (ap. A) nos permiten escribir las fórmulas de transformación de coordenadas:

$$A_x = |\mathbf{A}| \cos\theta \qquad A_y = |\mathbf{A}| \sin\theta, \tag{13}$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}. \tag{14}$$

Para obtener θ se calcula la inversa de la tangente (arcotangente), pero es necesario ajustar el ángulo según el cuadrante al que pertenzca el vector (ver ap. A.4).

Es importante recalcar que las ecuaciones (13) y (14) *son válidas para vectores de cualquier cuadrante, siempre y cuando se mida correctamente el ángulo* θ*,* es decir, desde el eje X y con el signo positivo para el sentido antihorario.

En ciertos problemas, es posible que se encuentren vectores determinados mediante su módulo y el ángulo que forman con alguna dirección que no es el eje X, o utilizando para los ángulos una convención de signos distinta de la empleada en

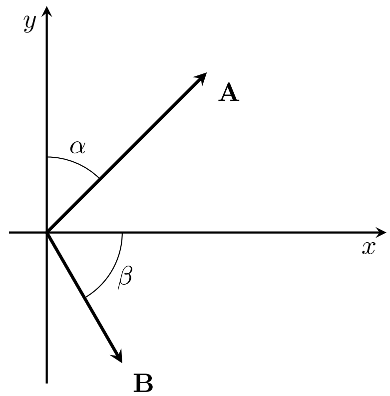


FIGURA 4. Vectores indicados mediante módulo y dirección pero empleando referencias distintas a las de las coordenadas polares.

coordenadas polares. Para encontrar las coordenadas cartesianas en esos casos no se puede aplicar la fórmula (13), sino que debe determinarse la relación correcta utilizando trigonometría, caso por caso. Por ejemplo, supongamos que se nos presenta una situación como en la fig. 4 y se nos dan los módulos de los dos vectores y se nos dice que los ángulos son $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/6$. Estos ángulos no nos permiten usar la ec. (13) porque α está medido respecto del eje Y, y β no tiene el signo correcto. Para encontrar las componentes cartesianas de los vectores podemos, o bien encontrar el ángulo respecto del eje X y emplear (13), o bien escribir fórmulas que empleen directamente los ángulos dados, que serán válidas sólo en esta situación particular. En el primer caso diríamos

$$\theta_A = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4}, \qquad A_x = A\cos\theta_A, \qquad A_y = A\sin\theta_A, \tag{15}$$

$$\theta_B = -\beta = -\frac{\pi}{6}, \qquad B_x = B\cos\theta_B, \qquad B_y = B\sin\theta_B. \tag{16}$$

En el segundo caso, ubicaremos los triángulos rectángulos que contienen al ángulo conocido y escribiremos

$$A_x = A\sin\alpha, \qquad A_y = A\cos\alpha, \tag{17}$$

$$B_x = B\cos\beta, \qquad B_y = -B\sin\beta. \tag{18}$$

Observar que en éste último caso las funciones trigonométricas nos permiten encontrar las longitudes de los catetos buscados, pero que debemos agregar los signos correctos de las coordenadas en función del cuadrante a que pertenezca el vector.

6. Producto escalar y proyección

6.1. Producto escalar. Definimos el *producto escalar* de dos vectores de modo que

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{19}$$

El producto escalar, al igual que el módulo, es una cantidad escalar, es decir que su valor no cambia si se rotan los ejes cartesianos y se calcula en función de las nuevas componentes de los vectores. El producto escalar se llama también producto interno, y lo denotamos mediante un punto.

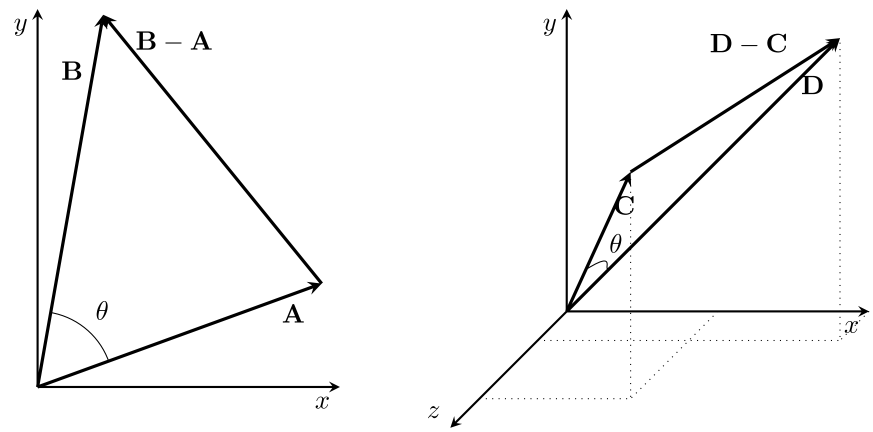


Figura 5. Construcción para encontrar el ángulo entre dos vectores.

De la definición se sigue que el producto escalar es conmutativo y distributivo,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}, \tag{20}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}, \tag{21}$$

y que el producto escalar de un vector con sí mismo es igual al cuadrado de su módulo:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2. \tag{22}$$

6.2. Ángulo entre dos vectores. El producto escalar está relacionado con el ángulo que forman los vectores involucrados. Para ver esto, nos referimos a la fig. 5 y observamos que los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ forman un triángulo, las longitudes de cuyos lados están relacionadas por el teorema del coseno:

$$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta. \tag{23}$$

Pero puesto que $|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2 = (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, concluimos que

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta. \tag{24}$$

El razonamiento es igualmente válido para dos vectores en el espacio (fig. 5, derecha).

Muchos autores (p. ej. Santaló, 1961, §I.4) definen el producto escalar mediante la expresión (24) y utilizan consideraciones geométricas para demostrar (19). Nosotros preferimos partir de la definición (19) porque la demostración de (24) resulta así más sencilla y válida para espacios de cualquier dimensión.

La expresión (24) nos permite deducir el signo del producto escalar en función del ángulo que forman los vectores:

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \theta_{AB} \text{ es agudo} \\ 0 & \text{si } \theta_{AB} = \pi/2 \text{ (recto)} \\ -1 & \text{si } \theta_{AB} \text{ es obtuso} \end{cases} \tag{25}$$

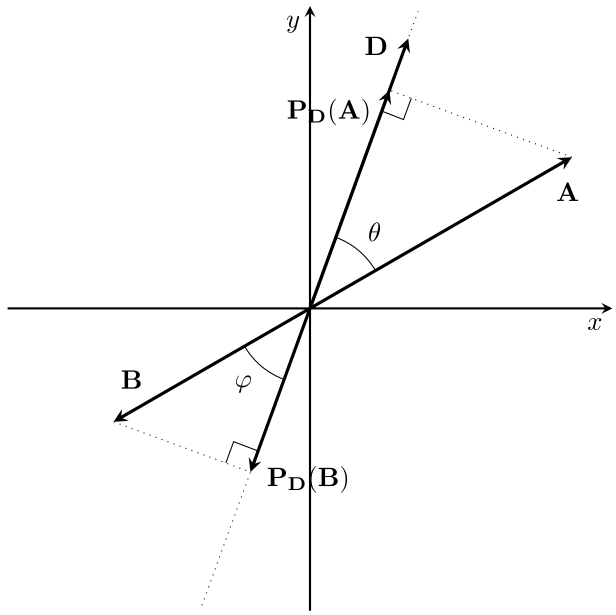


FIGURA 6. Proyección ortogonal de los vectores **A** y **B** sobre el vector **D**.

6.3. Proyección ortogonal. La *proyección ortogonal* o perpendicular, de un vector **A** sobre otro **D**, es un vector con la dirección de **D** y tal que la distancia entre los extremos de **A** y su proyección es la mínima posible. Denotaremos la proyección de **A** sobre **D** por $\mathbf{P_D}(\mathbf{A})$.

El punto sobre la recta definida por la dirección de **D** que se encuentra a la mínima distancia del extremo de **A** es el dado por la intersección entre la recta y una perpendicular a ella que pasa por el extremo de **A** (fig. 6). Tenemos entonces que $\cos\theta = |\mathbf{P_D}(\mathbf{A})|/|\mathbf{A}|$ y podemos escribir

$$\mathbf{P_D}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}|\mathbf{A}|\cos\theta = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}}{|\mathbf{D}|^2}\mathbf{D}. \tag{26}$$

Nótese que el vector proyección puede ser paralelo o antiparalelo a **D** (como en el caso de la proyección de **B** en la fig. 6). La expresión (26), en virtud del signo del producto escalar, da tanto el módulo como la dirección y sentido correctos de la proyección.

7. VERSORES, VERSORES CANÓNICOS Y BASE CARTESIANA

7.1. Versores. Los vectores de módulo unidad se llaman *versores,* y suelen indicarse colocando el signo ˘ sobre el símbolo del vector. Dado un vector cualquiera se puede encontrar un versor con su misma dirección y sentido dividiéndolo por su módulo:

$$\breve{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}. \tag{27}$$

7.2. Versores canónicos. Los *versores canónicos,* o versores fundamentales, son versores que apuntan en la dirección positiva de los ejes cartesianos (Santaló, 1961,

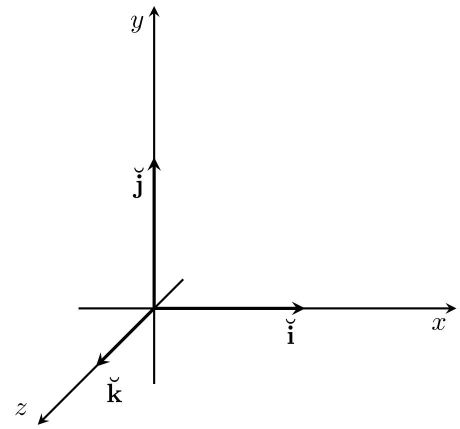


FIGURA 7. Versores canónicos

§I.3.5). Designamos con $\breve{\mathbf{i}}$, $\breve{\mathbf{j}}$, $\breve{\mathbf{k}}$ a los versores paralelos a los ejes X, Y y Z respectivamente (fig. 7).

7.3. Base cartesiana. Teniendo en cuenta las definiciones que hemos dado de suma de vectores y de multiplicación por un escalar, resulta claro que un vector cualquiera se puede escribir

$$\mathbf{A} = A_x\breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{j}} + A_z\breve{\mathbf{k}}. \tag{28}$$

Además, dado que las componentes cartesianas de un vector son únicas (puesto que alterar una cualquiera de ellas implica referirse a otro vector), vemos que hay una única manera de expresar un vector en función de los versores canónicos. Un conjunto de vectores con esas dos propiedades (es decir que permiten representar mediante su suma y multiplicación por escalares a todos los vectores del espacio, y que además esto se puede hacer de una sola manera) se llama *base* del espacio. Cuando los vectores de la base son (como en este caso) todos mutuamente perpendiculares, se denomina *base ortogonal.*

Pueden darse infinitas bases distintas para un espacio, pero todas tienen el mismo número de vectores (que es igual a la dimensión del espacio, y corresponde al número de ejes necesarios para definir una posición). La ventaja de esta notación es que hace explícito el SC en el cual se están expresando las coordenadas del vector. Por ejemplo, el vector de la fig. 8 puede expresarse en cualquiera de los dos SC cartesianos indicados:

$$\mathbf{A} = A_x\breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{j}} = A_t\breve{\mathbf{t}} + A_n\breve{\mathbf{n}}. \tag{29}$$

7.4. Coordenadas como proyecciones ortogonales. Cuando los ejes coordenados (y por lo tanto los vectores de la base) son mutuamente ortogonales, la componente de un vector a lo largo de uno de los ejes puede expresarse como una proyección ortogonal. Esto puede verse geométricamente a partir de la definición de componente cartesiana y de proyección, o analíticamente de la expresión (26) de la proyección ortogonal. Por ejemplo, en el caso de la componente a lo largo del eje X:

$$\mathbf{P}_{\breve{\mathbf{i}}}(\mathbf{A}) = \frac{\breve{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{A}}{|\breve{\mathbf{i}}|^2}\breve{\mathbf{i}} = \breve{\mathbf{i}}\cdot(A_x\breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{j}} + A_z\breve{\mathbf{k}})\breve{\mathbf{i}} = A_x\breve{\mathbf{i}}, \tag{30}$$

recordando que $|\breve{\mathbf{i}}|^2 = \breve{\mathbf{i}} \cdot \breve{\mathbf{i}} = 1$ y que $\breve{\mathbf{i}} \cdot \breve{\mathbf{j}} = \breve{\mathbf{i}} \cdot \breve{\mathbf{k}} = 0$.

Vemos entonces que las coordenadas de $\mathbf{A}$ en el SC dado por la base $\breve{\mathbf{i}}$, $\breve{\mathbf{j}}$, $\breve{\mathbf{k}}$ pueden escribirse

$$A_x = \breve{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{A}, \qquad A_y = \breve{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{A}, \qquad A_z = \breve{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}. \tag{31}$$

7.5. Rotación de un SC cartesiano. Se da frecuentemente en la práctica el caso de conocer un vector en términos de sus coordenadas dadas en un SC que necesita escribirse en otro SC rotado respecto del primero. Un caso típico es el del problema del plano inclinado: suele resultar conveniente resolverlo en un sistema de ejes dado por versores $\breve{\mathbf{n}}$ y $\breve{\mathbf{t}}$, respectivamente normal y tangente al plano (fig. 8), pero algunos vectores (tal como la aceleración de la gravedad) se conocen en el sistema de ejes dado por $\breve{\mathbf{j}}$ e $\breve{\mathbf{i}}$, respectivamente perpendicular y paralelo al piso. Veremos ahora cómo realizar la transformación deseada, utilizando la idea de coordenadas como proyección ortogonal sobre los versores de la base.

El dato que conocemos es el ángulo θ que forma el plano inclinado con el piso. Los cuatro ángulos indicados en la figura 8 tienen el mismo valor absoluto: $\theta = \theta'$ y $\theta'' = \theta'''$ por ser opuestos por el vértice, y $\theta'' = \theta$ por ser ambos complementarios de un mismo ángulo.

Suponemos conocer las coordenadas de $\mathbf{A}$ respecto de $\breve{\mathbf{i}}$ y $\breve{\mathbf{j}}$, es decir $\mathbf{A} = A_x\breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{j}}$. Queremos encontrar las A_t y A_n que nos permitan escribir $\mathbf{A} = A_t\breve{\mathbf{t}} + A_n\breve{\mathbf{n}}$. De acuerdo a §7.4, se tiene que $A_t = \breve{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{A}$ y $A_n = \breve{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}$. Puesto que el producto escalar es distributivo respecto de la suma, resulta que

$$A_t = \breve{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{A} = A_x\breve{\mathbf{t}} \cdot \breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{t}} \cdot \breve{\mathbf{j}}, \tag{32a}$$

$$A_n = \breve{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A} = A_x\breve{\mathbf{n}} \cdot \breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{n}} \cdot \breve{\mathbf{j}}. \tag{32b}$$

De modo que lo que necesitamos para encontrar las coordenadas deseadas son los productos escalares de los versores de la base nueva con los de la otra base. Los podemos calcular encontrando los ángulos que forman entre ellos en la figura:

$$\breve{\mathbf{t}} \cdot \breve{\mathbf{i}} = \cos\theta, \qquad \breve{\mathbf{t}} \cdot \breve{\mathbf{j}} = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta, \tag{33a}$$

$$\breve{\mathbf{n}} \cdot \breve{\mathbf{i}} = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta \qquad \breve{\mathbf{n}} \cdot \breve{\mathbf{j}} = \cos\theta. \tag{33b}$$

Utilizando estas expresiones en (32) encontramos el resultado deseado,

$$\mathbf{A} = (A_x\cos\theta - A_y\sin\theta)\,\breve{\mathbf{t}} + (A_x\sin\theta + A_y\cos\theta)\,\breve{\mathbf{n}}. \tag{34}$$

Los productos escalares (33) sirven también para realizar la transformación inversa:

$$A_x = \breve{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{A} = A_t\breve{\mathbf{i}} \cdot \breve{\mathbf{t}} + A_n\breve{\mathbf{i}} \cdot \breve{\mathbf{n}} = A_t\cos\theta + A_n\sin\theta, \tag{35a}$$

$$A_y = \breve{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{A} = A_t\breve{\mathbf{j}} \cdot \breve{\mathbf{t}} + A_n\breve{\mathbf{j}} \cdot \breve{\mathbf{n}} = -A_t\sin\theta + A_n\cos\theta. \tag{35b}$$

Si se lo desea, también puede utilizarse (33) para escribir los versores de una base en función de los de la otra:

$$\breve{\mathbf{t}} = \cos\theta\breve{\mathbf{i}} - \sin\theta\breve{\mathbf{j}}, \qquad \breve{\mathbf{n}} = \sin\theta\breve{\mathbf{i}} + \cos\theta\breve{\mathbf{j}}, \tag{36}$$

$$\breve{\mathbf{i}} = \cos\theta\breve{\mathbf{t}} + \sin\theta\breve{\mathbf{n}}, \qquad \breve{\mathbf{j}} = -\sin\theta\breve{\mathbf{t}} + \cos\theta\breve{\mathbf{n}}. \tag{37}$$

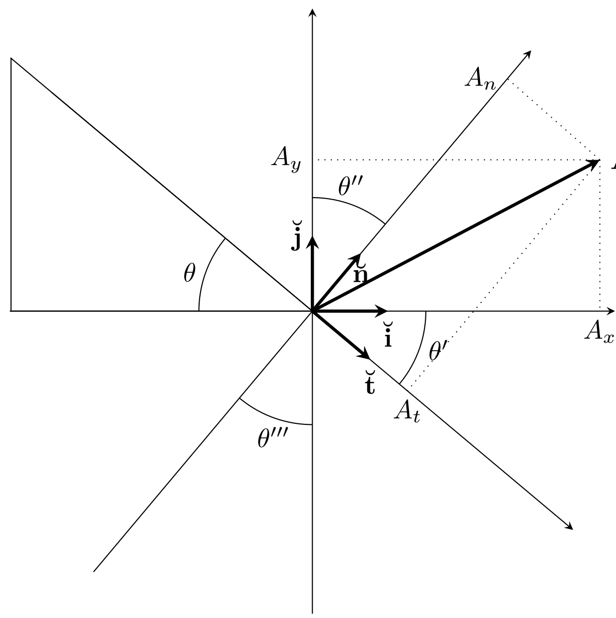


FIGURA 8. Relacion entre las coordenadas de dos SCs cartesianos, uno rotado respecto del otro en un ángulo θ.

8. Producto vectorial y productos triples

8.1. Producto vectorial. Para vectores tridimensionales, definimos el *producto vectorial,* indicado con una cruz, por

$$\begin{aligned}\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \breve{\mathbf{i}} & \breve{\mathbf{j}} & \breve{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \breve{\mathbf{i}}(A_y B_z - A_z B_y) + \breve{\mathbf{j}}(A_z B_x - A_x B_z) + \breve{\mathbf{k}}(A_x B_y - A_y B_x).\end{aligned} \tag{38}$$

Las barras horizontales indican el *determinante* de la matriz, cuyo desarrollo es el indicado en la segunda línea. El producto $\mathbf{C}$ es un vector[2] con las siguientes propiedades (Santaló, 1961, §I.4):

1. La dirección de $\mathbf{C}$ es perpendicular a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.
2. El sentido de $\mathbf{C}$ es el dado por la regla de la mano derecha.
3. El módulo del producto es $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta$, con θ el ángulo entre los vectores. Esto es igual al área del paralelogramo definido por los dos vectores.
4. Como consecuencia de lo anterior, el producto es nulo si $\mathbf{A}$ o $\mathbf{B}$ lo son, o si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son paralelos (o colineales).

Se cumple además que

5. El producto vectorial es *anticonmutativo*:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

[2]Estrictamente, el resultado del producto vectorial es un pseudovector o vector axial (Santaló, 1961, §I.4.3), pero aquí no necesitamos distinguir entre vectores y pseudovectores porque siempre trabajaremos con un espacio orientado positivamente (Santaló, 1961, §I.4.2), es decir tal que el sentido de $\breve{\mathbf{k}}$ es hacia el observador cuando $\breve{\mathbf{i}}$ apunta hacia la derecha y $\breve{\mathbf{j}}$ hacia arriba.

6. El producto vectorial es distributivo respecto de la suma de vectores:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}.$$

Las propiedades 4, 5 y 6 se pueden demostrar a partir de la definición por las propiedades del determinante. La propiedad 1 se sigue de las propiedades del determinante una vez que se escribe el producto escalar de $\mathbf{A}$ o $\mathbf{B}$ con el producto vectorial (ver §8.2). Damos una demostración de 3 en §8.3.

8.2. Producto mixto de tres vectores. (Santaló, 1961, §I.5.1). El producto mixto es la combinación de un producto escalar con uno vectorial:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}, \tag{39}$$

donde la igualdad se sigue de las definiciones de ambos productos. El valor absoluto del producto mixto es igual al volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores, como puede verificarse geométricamente.

Como consecuencia de las propiedades del determinante, el producto triple permanece invariado ante *permutaciones cíclicas* de los tres vectores:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}). \tag{40}$$

8.3. Doble producto vectorial. Una combinación de vectores que aparece en muchos problemas, en particular en el estudio del movimiento de rotación del cuerpo rígido, es el vector definido por el doble producto vectorial,

$$\mathbf{D}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}), \tag{41}$$

donde los paréntesis no pueden omitirse porque el producto vectorial *no es asociativo,* como se verá a continuación. El doble producto puede desarrollarse con la "regla del BAC-CAB":

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}). \tag{42}$$

Esta fórmula puede demostrarse a partir de la definición de producto vectorial. Resulta más sencillo hacerlo si se elige el sistema de coordenadas de modo que $\mathbf{C}=C\check{\mathbf{i}}$, y $\mathbf{B}=B_x\check{\mathbf{i}}+B_y\check{\mathbf{j}}$ (es decir, $C_y=C_z=0$ y $B_z=0$). Entonces $\mathbf{B}\times\mathbf{C}=-CB_y\check{\mathbf{k}}$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})&=-CB_y(\check{\mathbf{i}}A_y-\check{\mathbf{j}}A_x)=-\check{\mathbf{i}}CA_yB_y+CA_xB_y\check{\mathbf{j}}=\\ &-\check{\mathbf{i}}CA_yB_y+CA_x(B_y\check{\mathbf{j}}+B_x\check{\mathbf{i}}-B_x\check{\mathbf{i}})=\\ &-\check{\mathbf{i}}C(A_yB_y+A_xB_x)+CA_x(B_x\check{\mathbf{i}}+B_y\check{\mathbf{j}})=-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Podemos ahora ver que el producto vectorial no es asociativo:

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=-\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=-\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})+\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\neq\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}). \tag{43}$$

Finalmente, como aplicación de la fórmula (42) veamos que junto con (40) nos permite calcular fácilmente el módulo del producto vectorial (propiedad 3 de §8.1):

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2&=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot\big(\mathbf{B}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\big)=\\ &\mathbf{A}\cdot\big(\mathbf{A}|\mathbf{B}|^2-\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\big)=|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2=\\ &|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2(1-\cos^2\theta)=|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\operatorname{sen}^2\theta.\end{aligned} \tag{44}$$

Apéndice A. Trigonometría

Para comprender las presentes notas y poder trabajar con vectores es necesario manejar con soltura las medidas de ángulos y las funciones trigonométricas. Si el contenido de este apéndice no resulta inmediatamente claro, el estudiante deberá recurrir a un texto de matemáticas apropiado (por ejemplo Lang, 1986, cap. IV).

A.1. Ángulos. La medida del ángulo es la longitud del arco subtendido, s, dividida por el radio de la circunferencia R:

$$\theta = \frac{s}{R}. \tag{45}$$

Por esta razón el ángulo es *adimensional,* es decir que no tiene unidades. Por ejemplo si se traza un ángulo recto, el arco subtendido corresponde a un cuarto de la circunferencia total, por lo que $s = 2\pi R/4 = R\pi/2$ y el ángulo sera $\theta = R\pi/2R = \pi/2$. Del mismo modo podemos ver que el valor del ángulo llano es π y el del giro es 2π.

Cuando se quiere distinguir esta medida de ángulos de otras medidas tradicionales se dice que están medidos en *radianes,* aunque no existe propiamente una unidad radián, ya que los ángulos son como hemos dicho adimensionales.

La medida de un ángulo en *grados* asigna arbitrariamente el valor 180° al ángulo llano. Para comparar ángulos medidos en grados con ángulos medidos en radianes convertimos uno en otro multiplicando por $\pi/180°$ o por $180°/\pi$ según sea necesario, por ejemplo:

$$45° = 45° \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{4},$$
$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\frac{180°}{\pi} = 60°.$$

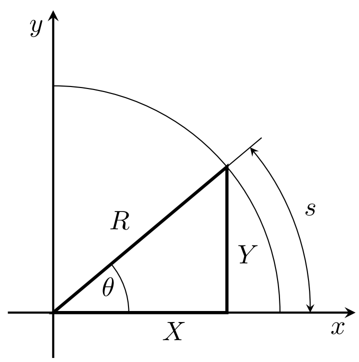
A.2. Funciones trigonométricas básicas.

$\theta = \frac{s}{R}$

$\sin\theta = \frac{Y}{R}$

$\cos\theta = \frac{X}{R}$

$\tan\theta = \frac{Y}{X}$



A.3. Identidades trigonométricas. Las propiedades geométricas de los triángulos rectángulos proporcionan diversas relaciones entre funciones trigonométricas, llamadas *identidades.* Son igualdades que expresan una relación válida para cualquier valor de los argumentos de las funciones indicadas. Escribimos aquí sin demostración algunas que resultarán de utilidad más inmediata en el curso.

De las definiciones surge inmediatamente que

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{46}$$

Como consecuencia del teorema de Pitágoras se tiene la importante *relación Pitagórica*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{47}$$

Considerando los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se concluye que las funciones trigonométricas de un ángulo son iguales a las cofunciones del ángulo complementario:

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x, \tag{48}$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x, \tag{49}$$

$$\tan(\pi/2 - x) = \frac{1}{\tan x} = \cot x. \tag{50}$$

Finalmente, son muy útiles las fórmulas para la suma y diferencia de ángulos (Lang, 1986, §IV.3):

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \tag{51}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y. \tag{52}$$

A.4. Funciones trigonométricas inversas; el arco tangente. Las funciones $\sin x$ y $\cos x$ están definidas para cualquier valor de x, mientras que $\tan x$ está definida para todo x excepto aquellos para los cuales $\cos x = 0$ (o sea $x = \pi/2 \pm n\pi$). Sin embargo no son funciones inyectivas, puesto que distintos valores de x pueden tener el mismo valor de la función (p. ej. $\sin \pi/6 = \sin 5\pi/6$). Por lo tanto para poder definir funciones inversas (arcoseno, arcocoseno, arcotangente) es necesario *restringir el dominio* de las funciones. En el caso de la tangente, se suele restringir su dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$. Por eso, si se quiere obtener el ángulo que forma un vector con el eje X, es necesario combinar el uso de la función arctan con el conocimiento del cuadrante al cual pertenece el vector.

Por ejemplo, dados los vectores $\mathbf{A} = (1, 1)$ y $\mathbf{B} = (-1, 1)$, se tiene según (14) que

$$\tan\theta_A = 1, \qquad \tan\theta_B = -1. \tag{53}$$

Utilizando una calculadora se obtendrá $\arctan 1 = \pi/4$, $\arctan(-1) = -\pi/4$. Vemos que efectivamente $\theta_A = \pi/4$, pero $\theta_B \neq -\pi/4 = 7\pi/4$, puesto que $\mathbf{B}$ pertenece al segundo cuadrante, y tiene que ser $\pi/2 \leq \theta_b \leq \pi$. Esto es porque a un ángulo de $-\pi/4$ (correspondiente por ejemplo al vector $(1, -1)$ también le corresponde una tangente igual a -1, y no hay forma de distinguir uno de otro basado sólo en el valor de la tangente. Sin embargo, como conocemos las componentes de $\mathbf{B}$, podemos ver que está en el segundo cuadrante y obtener el ángulo correcto sumando π: $\theta_B = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

En resumen, para obtener el ángulo correcto calcularemos $\theta_c = \arctan A_y/A_x$, y luego procederemos a corregirlo si es necesario: si $A_x \geq 0$, $\theta_A = \theta_c$, si $A_x < 0$, $\theta_A = \theta_c + \pi$.

Referencias

Lang, S. (1986), *A First Course in Calculus*, Springer, New York, 5 edición.
Santaló, L. A. (1961), *Vectores y Tensores*, EUdeBA, Buenos Aires.