MOVIMIENTO CIRCULAR Y MOVIMIENTO DE ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO

TOMÁS S. GRIGERA

Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos (IFLYSIB), CONICET y Universidad Nacional de La Plata, Calle 59 no. 789, La Plata

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Calle 49 y 115, La Plata

Resumen. Se exponen brevemente las definiciones y herramientas para la descripción de la dinámica del movimiento circular y de la rotación de un cuerpo rígido con un eje de rotación cuya dirección no cambia con el tiempo. El tratamiento es del nivel de un curso introductorio de física de nivel universitario, con utilización de vectores y derivadas, sin emplear formalismo matricial.

1. Introducción

Se presenta primero el movimiento circular de una partícula, y a continuación el movimiento de rotación.Esta presentación supone que el lector está familiarizado con los siguientes conceptos:

1. **Vectores:** Noción de vector, operaciones elementales entre vectores y escalares, coordenadas cartesianas como proyección sobre los versores base, producto escalar, producto vectorial, producto triplo.
2. **Derivada:** Noción de derivada y reglas de derivación (derivada de la suma, producto, cociente y composición de funciones).
3. **Cinemática:** Descripción vectorial de trayectorias, velocidad, aceleración.

El apéndice A resume algunos de estos conceptos.

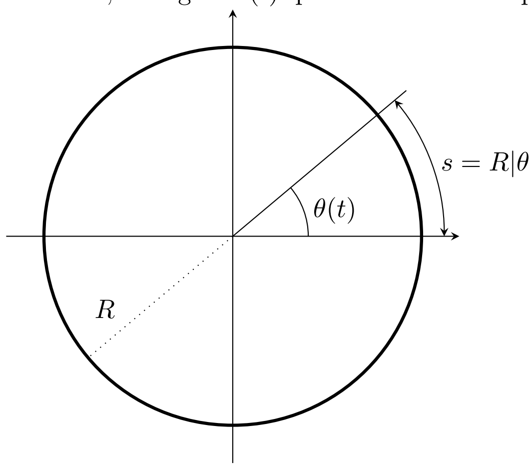
2. Movimiento circular

2.1. Descripción unidimensional. La forma más sencilla de describir una partícula que se mueve describiendo una circunferencia es utilizar un sistema de referencia (SR) cuyo origen coincida con el centro de la misma y un sistema de coordenadas (SC) tal que el plano del movimiento coincida con el plano xy (si se trata

---

E-mail address: tgrigera@iflysib.unlp.edu.ar.
Fecha: Setiembre de 2017.

de describir una única partícula, siempre es posible elegir tal SC). Entonces la distancia de la partícula al origen será siempre R (el radio de la circunferencia) y para determinar la posición en un instante de tiempo basta especificar una sola coordenada, el ángulo $\theta(t)$ que forma el vector posición con el eje x.



Análogamente a la velocidad y la aceleración definimos la *velocidad angular* ω y la *aceleración angular* α:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{1}$$

Puesto que el ángulo es una cantidad adimensional, se sigue que las dimensiones de α y ω son

$$[\omega] = \frac{1}{T}, \qquad [\alpha] = \frac{1}{T^2}, \tag{2}$$

de modo que 1/s, por ejemplo, es una unidad de velocidad angular. Sin embargo se suele utilizar rad/s (o rad/s^2 para la aceleración) para evitar confusión con la frecuencia (definida más abajo).

Conociendo $\alpha(t)$ puede obtenerse $\theta(t)$ por sucesivas integraciones del mismo modo que se obtiene la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ a partir de la aceleración. En particular, en el caso de α constante,

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2. \tag{3}$$

2.1.1. Frecuencia y período. Para el caso de velocidad angular constante ($\alpha = 0$), definimos el *período* T como el tiempo necesario para que la partícula recorra la circunferencia completa (es decir un ángulo de 2π). La relación entre el período y la velocidad angular es

$$\theta(T + t_0) - \theta(t_0) = \omega T = 2\pi, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{4}$$

T tiene evidentemente dimensión de tiempo.

La *frecuencia* se define como la inversa del período, esto es el número de revoluciones completadas en la unidad de tiempo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{5}$$

2.1.2. Velocidad angular y velocidad tangencial. Cuando es necesario distinguir entre velocidad angular y la velocidad a secas ($\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$) se denomina a veces a esta ultima *velocidad tangencial* (redundantemente, puesto que la velocidad por definición es *siempre* tangencial a la trayectoria). Recordemos que la distancia recorrida en un intervalo de tiempo está dada por

$$d(t;t_0) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(t')|\, dt'. \tag{6}$$

Análogamente, la distancia angular se puede calcular como

$$\delta(t;t_0) = \int_{t_0}^{t} |\omega(t')|\, dt'. \tag{7}$$

Puesto que el movimiento es circular, la distancia correspondiente es $d(t;t_0) = R\delta(t;t_0)$. Sustituyendo las respectivas distancias por sus definiciones y derivando respecto de t se sigue que

$$v(t) \equiv |\mathbf{v}(t)| = R|\omega(t)|. \tag{8}$$

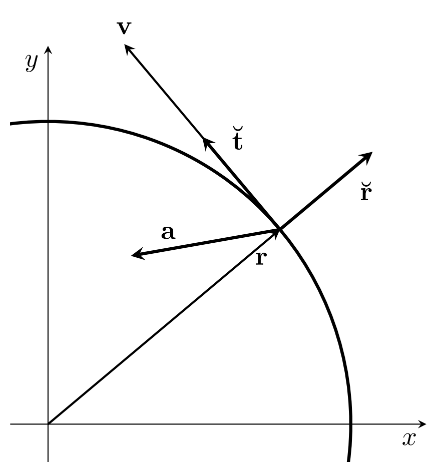
2.2. Descripción vectorial. La descripción anterior, aunque conveniente en muchos casos, es insuficiente cuando se quieren analizar las fuerzas que producen el movimiento circular: para aplicar la segunda ley de Newton es necesario conocer las tres componentes cartesianas del vector aceleración.

2.2.1. Aceleración radial y tangencial. Consideremos primero el caso en que el plano del movimiento coincide con el plano xy y su centro con el origen de coordenadas. El vector posición $\mathbf{r}(t)$, en este SR es de módulo constante, $|\mathbf{r}(t)| = R$. Se sigue entonces que la tangente a la trayectoria (dada por la velocidad), es perpendicular a $\mathbf{r}(t)$ (ver Ap. B):

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = 0. \tag{9}$$

Para interpretar la aceleración $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt$ es conveniente descomponerla utilizando los ejes dados por los versores $\check{\mathbf{r}}$ y $\check{\mathbf{t}}$, respectivamente radial y tangencial (ver fig).

$$\check{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}, \qquad \check{\mathbf{t}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}. \tag{10}$$



Para encontrar las componentes proyectaremos sobre los respectivos versores (sec. A.1.3). Calculemos primero

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{dt}-\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{v}=-v^2, \tag{11}$$

pues $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$, y

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}=v\frac{dv}{dt}. \tag{12}$$

Dividiendo entonces por los módulos r y v, obtenemos

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}=a_r\breve{\mathbf{r}}+a_t\breve{\mathbf{t}}, \\ &a_r=\breve{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a}=-\frac{v^2}{R}, &&\text{aceleración radial,} \\ &a_t=\breve{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{a}=\frac{dv}{dt}, &&\text{aceleración tangencial.} \end{aligned} \tag{13}$$

Es decir que la aceleración tiene una *componente radial con dirección centrípeta,* presente aunque el módulo de la velocidad sea constante, y una *componente tangencial* de módulo igual a dv/dt, presente solo cuando varía el módulo de la velocidad además de su dirección (con sentido igual u opuesto a la velocidad según el mismo esté creciendo o decreciendo respectivamente). Notemos que el módulo de la aceleración centrípeta está dado por el módulo de la velocidad instantánea y el radio de la circunferencia, v^2/R, *independientemente* del valor de la aceleración tangencial. Por último, observemos que si la velocidad angular es constante, también lo es el módulo de $\mathbf{v}$ (8) de modo que si la aceleración angular α es nula, también lo es la aceleración tangencial.

Si el plano de rotación no es el plano xy, el módulo de $\mathbf{r}(t)$ no es necesariamente constante, pero sí lo sera el vector $\mathbf{R}(t)=\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_C$, donde $\mathbf{r}_C$ es la posición del centro de la circunferencia. Será entonces $|\mathbf{R}(t)|=R$, y al ser $\mathbf{r}_C$ independiente del tiempo podemos escribir $\mathbf{v}(t)=d\mathbf{R}/dt$, con lo que $\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{R}(t)=0$. El desarrollo anterior se puede repetir exactamente, sólo reemplazando $\mathbf{r}(t)$ por $\mathbf{R}(t)$ y $\breve{\mathbf{r}}(t)$ por $\breve{\mathbf{R}}(t)=\mathbf{R}(t)/|\mathbf{R}(t)|$. Las conclusiones del párrafo anterior permanecen válidas, sólo que referidas al punto $\mathbf{r}_C$.

2.2.2. Velocidad angular. Daremos ahora una definición vectorial de la velocidad y la aceleración angular, que generaliza nuestra definición unidimensional (1). Definiremos el *vector velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ tal que su módulo sea igual a la velocidad angular, su dirección sea normal al plano del movimiento y su sentido sea tal que cumpla la regla de la mano derecha, es decir que si se observa al movimiento desde una posición tal que el vector apunte al observador, la partícula se mueve en sentido antihorario (ver fig.).

Consideremos primero el caso en que el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas y el plano del movimiento es el xy. La relación entre $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}, \tag{14}$$

como puede verificarse gráficamente. El módulo del la velocidad puede obtenerse de (14):

$$v=R\omega, \tag{15}$$

respetándose la relación (8).

2.2.3. Aceleración angular. El vector aceleración angular es

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{16}$$

Puesto que estamos considerando un movimiento estrictamente circular, éste tiene lugar en un plano y la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ (indiquémosla con el versor $\breve{\mathbf{e}} \equiv \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$) no cambia con el tiempo[1], por lo tanto resulta que

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d(\omega\breve{\mathbf{e}})}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\breve{\mathbf{e}}, \tag{17}$$

es decir que el módulo del vector $\boldsymbol{\alpha}$ es igual al módulo de aceleración angular (1), y su dirección es paralela a la de $\boldsymbol{\omega}$.

Posemos encontrar la relación entre $\boldsymbol{\alpha}$ y $\mathbf{a}$ derivando (14):

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \tag{18}$$

El segundo término es evidentemente paralelo a $\mathbf{r}$. El primero, por ser $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\omega}$, es en cambio paralelo a $\mathbf{v}$ (tangencial). Resulta entonces que podemos escribir las componentes radial y tangencial de la aceleración como

$$\mathbf{a}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \tag{19a}$$

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}. \tag{19b}$$

Puede verificar el lector que el sentido de $\mathbf{a}_r$ es centrípeto, tal como hallamos en la sec. 2.2.1. Puesto que R es constante, de (13) y (15) concluimos que

$$a_t = \breve{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\breve{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \tag{20}$$

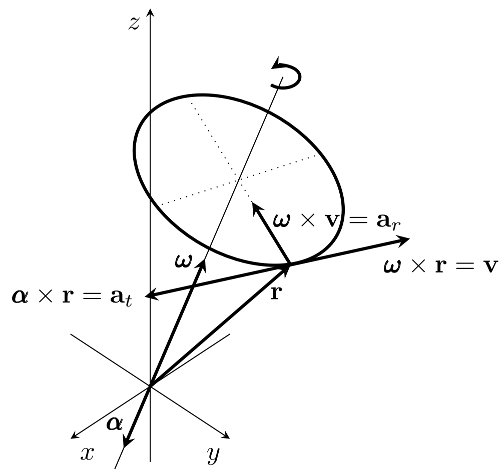
2.2.4. Movimiento circular fuera del plano xy. Si el movimiento no es en el plano xy, podemos como antes definir la posición respecto del centro $\mathbf{r}_C$ de la circunferencia, $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_C$; el radio del movimiento es ahora $R = |\mathbf{R}(t)|$. Podemos definir como antes $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} \times \mathbf{a}/v^2$, y este vector define el plano del movimiento. La línea definida por $\boldsymbol{\omega}$ que pasa por el punto $\mathbf{r}_C$ es el *eje de rotación.*

Las relaciones (14), (15), (18), (19b) y (20) son válidas reemplazando $\mathbf{r}$ por $\mathbf{R}$. En el caso particular en que $\boldsymbol{\omega}$ es paralela a $\mathbf{r}_C$ (es decir, *si el eje de rotación pasa por el origen de coordenadas*), $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_C + \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ (y análogamente para $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$), de modo que (14), (15), (18), (19b) y (20) pueden utilizarse tal como están escritas[2].

---

[1] En el caso particular en que el plano es el xy, el eje de rotación coincide con el eje z, es decir $\breve{\mathbf{e}} = \breve{\mathbf{k}}$ o $\breve{\mathbf{e}} = -\breve{\mathbf{k}}$

[2] Esto resultará útil al tratar la rotación del cuerpo rígido, pues como veremos, en ese caso todas las partículas del sistema giran en distintos planos pero con un mismo eje de rotación.



2.2.5. Eje de rotación variable. Consideremos nuevamente la ecuación (14) para el caso en que $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}$ no son perpendiculares. Como hemos visto (§2.2.4), esta ecuación corresponde a un movimiento circular en un plano perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ en torno a un eje que pasa por el origen. En este movimiento, la línea que va del origen al extremo del vector $\mathbf{r}$ describe un cono centrado en $\boldsymbol{\omega}$. Podemos entonces, con mayor generalidad, interpretar la ecuación

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t), \tag{21}$$

como la *rotación* del vector $\mathbf{r}$ en torno a la dirección del vector $\boldsymbol{\omega}$, con velocidad angular $|\boldsymbol{\omega}|$ y sentido dado por la regla de la mano derecha. Si $\mathbf{r}$ es el vector posición, como hemos considerado hasta ahora, se trata de la descripción de un movimiento circular, pero la interpretación de (21) como rotación puede aplicarse independientemente de la naturaleza la magnitud física que represente el vector $\mathbf{r}$.

Supongamos ahora que nos encontramos con una trayectoria que cumple ecuación (21) pero con un vector $\boldsymbol{\omega}$ cuya *dirección* varía con el tiempo. La trayectoria global no será circular (en particular, el movimiento no estará contenido en un plano) pero el movimiento puede tratarse como *instantáneamente circular,* ya que en cada instante (21) describe la rotación de $\mathbf{r}$ en torno a $\boldsymbol{\omega}$. El eje de rotación (dependiente del tiempo) es $\breve{\mathbf{e}}$ (la dirección de $\boldsymbol{\omega}$), y el centro de rotación $\mathbf{r}_C$ y el la posición respecto de éste, $\mathbf{R}$, se encuentran a partir de la proyección de $\mathbf{r}$ sobre $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{r}_C = (\breve{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{r})\breve{\mathbf{e}}, \tag{22}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C. \tag{23}$$

De (23) y (21) podemos obtener el módulo de la velocidad como

$$v = \omega R, \qquad R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|. \tag{24}$$

Así, las relaciones (14) y (15) subsisten aún en el caso en que la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ es variable, pero no así las relaciones que involucran a la aceleración. Ahora la aceleración angular

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\breve{\mathbf{e}} + \omega\frac{d\breve{\mathbf{e}}}{dt} = \alpha_{\parallel}\breve{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\alpha}_{\perp}, \tag{25}$$

tiene componentes paralelas y perpendiculares a $\breve{\mathbf{e}}$, y si bien la ec. (18) sigue siendo válida, la aceleración tiene componentes hacia afuera del plano instantáneo de rotación (paralelas a $\boldsymbol{\omega}$) y el primer término puede tener componentes en cualquier dirección, por lo que no pueden identificarse las componentes radial y tangencial como en (42).

Tampoco es válida la ec. (20). La aceleración tangencial no está dada sólo por la componente $\alpha_\parallel$, ya que el producto $\boldsymbol{\alpha}_\perp \times \mathbf{r}$ puede tener una componente tangencial. Por eso, si bien $\alpha_\parallel$ es la razón de cambio de ω, no puede relacionarse esta derivada con la razón de cambio de la rapidez v como en (20), ya que la relación (24) es válida instantáneamente pero R no es necesariamente constante:

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} + \frac{dR}{dt}\omega = R\alpha_\parallel + \frac{dR}{dt}\omega. \tag{26}$$

Esto puede verse proyectando $d\mathbf{R}/dt$ sobre $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{R}\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_C}{dt}\right) = \mathbf{R}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{R}\cdot\frac{d\mathbf{r}_C}{dr} = -\mathbf{R}\cdot\frac{d\mathbf{r}_C}{dr}. \tag{27}$$

Puesto que la dirección de $\mathbf{r}_C$ (es decir $\breve{\mathbf{e}}$) está variando, la derivada de $\mathbf{r}_C$ no será paralela a $\breve{\mathbf{e}}$ y por lo tanto el último producto escalar puede ser no nulo, con lo cual la derivada de $\mathbf{R}$ puede tener una componente paralela a $\mathbf{R}$ y por lo tanto su módulo puede variar.

3. Movimiento rotacional de un cuerpo rígido

Un *cuerpo rígido* es un sistema de partículas tal que las distancias entre todos los pares de partículas permanece constante a lo largo del tiempo. Si un cuerpo rígido se mueve de modo de que una de sus partículas permanezca en reposo, el movimiento resultante sólo puede dar lugar a una transformación de las posiciones que deje inalterada la posición del punto fijo (centro de rotación) y que conserve las distancias entre todos los pares de partículas. Una tal transformación se denomina *rotación.*

Un tratamiento completo de las rotaciones requiere representar las mismas en forma matricial, formalismo que excede el nivel normalmente esperado de los cursos de física introductoria, de manera que aquí hacemos un tratamiento parcial de la rotación del cuerpo rígido, aplicable a los casos en que la dirección del eje de rotación es constante en el tiempo. El tratamiento se basa en gran parte en las relaciones establecidas más arriba para el movimiento circular.

En efecto, una propiedad de las rotaciones es que una vez efectuada una rotación (es decir, transformadas las posiciones de modo de preservar el centro de rotación y las distancias relativas), *habrán quedado en su posición inicial, además del centro de rotación, todas las partículas ubicadas a lo largo de una recta que pasa por dicho centro*[3]. Esta recta es el *eje de rotación.* Puesto que el cuerpo es rígido, se sigue que la distancia de una partícula cualquiera al eje de rotación es una constante: cada partícula se mueve instantáneamente[4] en una trayectoria circular.

Considerando ahora dos partículas en un mismo plano perpendicular al eje de rotación, e inicialmente sobre una misma recta radial, vemos que para que su distancia no varíe deben ambas recorrer el mismo ángulo. Lo mismo podemos decir de

---

[3] La demostración de esta afirmación requiere del formalismo matricial de las rotaciones tal como se presenta por ejemplo en Goldstein et al. (2001, Cap. 4).

[4] Decimos instantáneamente porque si el eje de rotación variara en el tiempo, el movimiento no sería estrictamente circular sino que correspondería al caso discutido en §2.2.5.

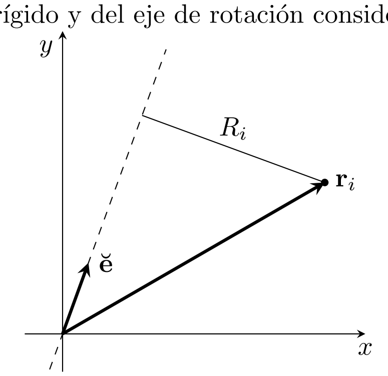
dos partículas ubicadas sobre una misma circunferencia centrada en el eje de rotación. Concluimos que *durante el movimiento de rotación, las partículas del cuerpo rígido se mueven instantáneamente en una trayectoria circular con una velocidad angular común.* Puesto que el eje de rotación es también común, la afirmación vale también para el *vector* velocidad angular ($\boldsymbol{\omega}$).

Poniendo el origen de coordenadas en el centro de rotación, tenemos entonces que todas las partículas se mueven con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, cuya dirección $\breve{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$ define el eje de rotación. Nos encontramos entonces en el caso de §2.2.4 (movimiento circular en un plano cualquiera en torno a un eje de rotación que pasa por el origen).

3.1. Momento de inercia. En la descripción del movimiento de rotación juega un papel importante el *momento de inercia,*

$$I = \sum_i m_i |\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_i|^2 = \sum_i m_i R_i^2, \tag{28}$$

(ver figura). El momento de inercia, como veremos enseguida, es una medida de la inercia rotacional. Depende de la geometría (distribución de masas) del cuerpo rígido y del eje de rotación considerado.



3.1.1. Teorema de Steiner. El teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos permite expresar el momento de inercia respecto de un eje arbitrario en función del momento de inercia de un eje paralelo al mismo pero que pasa por el centro de masa.

Supongamos conocer el momento de inercia I_{CM} respecto de un eje $\breve{\mathbf{e}}$ que pasa por el centro de masa $\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}$. Poniendo el origen de coordenadas en el centro de masa, el momento de inercia respecto a un eje paralelo a $\breve{\mathbf{e}}$ que pasa por el punto $\mathbf{r}_0$ es

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i |\breve{\mathbf{e}} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)|^2 = \sum_i m_i |\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_i - \breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_0|^2 \\ &= \sum_i m_i |\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_i|^2 + \breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_0|^2 - 2(\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_0) \\ &= I_{\mathrm{CM}} + M|\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_0|^2, \end{aligned} \tag{29}$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total y el último término del desarrollo del cuadrado se anula al sumar sobre las partículas pues $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = M\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = 0$ porque hemos puesto el origen en el CM. Llamando $R = |\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_0|$ (la distancia entre el nuevo eje y el CM), se tiene

$$I = I_{\mathrm{CM}} + MR^2, \qquad \text{(teorema de Steiner)}. \tag{30}$$

3.2. Energía cinética de rotación. Para un cuerpo rígido moviéndose con un punto fijo (es decir realizando una rotación sin traslación), la energía cinética es

$$K_R = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_i|^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{31}$$

pues $\boldsymbol{\omega}$ es común a todas las partículas. Esta expresión es análoga a la de una partícula ($(1/2)mv^2$) y muestra el rol del momento de inercia como medida de la inercia rotacional.

Si el centro de rotación (llamémoslo $\mathbf{R}$) *no* está en reposo, escribamos las posiciones (respecto de un SR inercial) como $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} + \mathbf{R} = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R}$ y las velocidades $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{V}$ con $\mathbf{u}_i = d\mathbf{r}'_i/dt$. La energía cinética será

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \sum_i m_i (\mathbf{u}_i + \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(u_i^2 + V^2 + 2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{V} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 + \frac{1}{2} M V^2 + \mathbf{V} \cdot \sum m_i \mathbf{u}_i. \end{aligned} \tag{32}$$

El primer término es entonces la energía cinética de rotación y se se puede escribir utilizando (31). En cuanto al último término, como $\sum_i m_i u_i = M \mathbf{v}'_{\mathrm{CM}}$, con $\mathbf{v}'_{\mathrm{CM}}$ la velocidad del centro de masa respecto del centro de rotación $\mathbf{R}$. Por lo tanto, *si el eje de rotación pasa por el CM,* (es decir si $\mathbf{R} = \mathbf{r}_{\mathrm{CM}}$) el último término se anula y se puede escribir

$$K = \frac{1}{2} M V_{\mathrm{CM}}^2 + K_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M V_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{33}$$

K_{CM} es la energía cinética respecto del centro de masa, que para el cuerpo rígido es energía de rotación.

3.3. Momento angular. El momento angular del cuerpo rígido se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \sum_i m_i \left[r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i \right] = \boldsymbol{\omega} \sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i. \end{aligned} \tag{34}$$

La última expresión no es muy útil en la práctica, pero muestra que si bien $\mathbf{L}$ tiene siempre una componente a lo largo de $\boldsymbol{\omega}$, en general $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ *no son paralelos.*Existe para cada cuerpo un conjunto de direcciones, determinadas por su geometría, tales que si $\boldsymbol{\omega}$ está a lo largo de una de ellas, se encuentra que $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{L}$ son paralelos. Estas direcciones se denominan *ejes principales de inercia.* Se puede demostrar que todo cuerpo tiene al menos tres ejes principales, pero puede haber más en caso de cuerpos dotados de simetría. En ese caso los ejes de simetría son ejes principales. Por ejemplo, para un cuerpo esférico (máxima simetría de rotación) $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son siempre paralelos (es decir, todos los ejes son principales). En el caso de un disco, el eje perpendicular al plano del disco es principal, así como todos los perpendiculares a éste (es decir los que atraviesan el disco de canto).

La componente de $\mathbf{L}$ paralela al eje de rotación puede expresarse en función del momento de inercia:

$$L_{\parallel} \equiv \breve{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{L} = \sum_i m_i \breve{\mathbf{e}} \cdot [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] = \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i m_i (\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_i) \omega = \sum_i m_i |\breve{\mathbf{e}} \times \mathbf{r}_i|^2 \omega = I\omega, \tag{35}$$

donde hemos usado la posibilidad de permutar cíclicamente el producto mixto. En el caso de un eje principal, $L_{\parallel}$ es la única componente del momento angular, por lo cual la relación es válida entre los vectores completos:

$$L_{\parallel} = I\omega, \qquad \text{(todos los ejes)}, \tag{36a}$$

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \qquad (\textit{sólo} \text{ eje principal}). \tag{36b}$$

3.4. Ecuación del movimiento de rotación de un cuerpo rígido. A partir de las relaciones anteriores podemos escribir la ecuación de movimiento de rotación en torno a un eje de dirección constante en el tiempo. Partimos de la relación (ver Ap. C)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}, \tag{37}$$

y proyectamos sobre el eje de rotación:

$$\tau_{\parallel} \equiv \breve{\mathbf{e}} \cdot \tau = \breve{\mathbf{e}} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\breve{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{L})}{dt} = \frac{dL_{\parallel}}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha. \tag{38}$$

Hemos usado el hecho de que la dirección del eje de rotación es constante al afirmar que $d(\breve{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{L})/dt = \breve{\mathbf{e}} \cdot d\mathbf{L}/dt$ y al utilizar I como una constante (pues el momento de inercia puede ser distinto para ejes distintos).

Además del requisito de la constancia de $\breve{\mathbf{e}}$, el resultado requiere de las mismas condiciones necesarias para la validez de (37). De acuerdo al Apéndice C, podemos afirmar entonces que la ecuación para el movimiento rotacional

$$\tau_{\parallel} = I\alpha, \tag{39}$$

es válida si el eje pasa por el origen del sistema de coordenadas respecto del que se calculan el torque y momento angular y a) el origen de coordenadas está fijo en algún sistema de referencia inercial (SRI), o bien b) el origen de coordenadas coincide con el centro de masa, aunque éste esté acelarado, o bien c) el origen de coordenadas está acelerado en una dirección en todo momento paralela al vector posición del centro de masa.

Mientras se cumplan alguna de las tres condiciones anteriores y la dirección del eje de rotación sea constante, la ec. (39) vale para cualquier eje, aún cuando no sea principal. Si el eje es principal, $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son paralelos[5]. La rotación puede mantenerse sin torque externo, y puede acelerarse aplicando un torque paralelo a $\breve{\mathbf{e}}$. En esta situación (25) describe la relación entre todas las componentes de $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\alpha}$.

Si el eje no es principal, se necesitan torques en el plano perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ para mantener la rotación[6]. En este caso la relación (39) sólo se refiere a la componente

[5] $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\omega}$ deben ser paralelos para que sea constante la dirección del eje de rotación.

[6] Si el cuerpo se pone a rotar en torno a un eje que no es principal y luego se eliminan los torques, la velocidad angular no puede mantener su dirección y el movimiento es más complicado de lo que podemos describir sin introducir matrices. Alonso y Finn (1970, §10.2) dan un ejemplo

del torque a lo largo del eje de rotación, que es la que está relacionada con un cambio de ω.

Finalmente, si fuera necesario considerar la rotación en torno a un punto que no cumple ninguna de las tres condiciones anteriores, se debe utilizar la ecuación (62) y obtener a partir de ella la ecuación de movimiento proyectando sobre el eje de rotación.

Apéndice A. Algunas nociones previas

A.1. Vectores. Para una exposición completa sobre álgebra vectorial se puede consultar alguno de los numerosos textos existentes (por ejemplo Santaló, 1961). También está disponible el apunte de cátedra sobre vectores en la página de Física General I del autor.

A.1.1. Sistema de coordenadas y base. Para indicar cuantitativamente un vector, es necesario primero elegir un sistema de coordenadas (SC) respecto del cual indicar su módulo y dirección. Un SC *cartesianas* queda definido por un origen y dos (o tres) *ejes coordenados* perpendiculares entre sí. El vector se expresa entonces en términos de sus coordenadas o *componentes* cartesianos, que son los desplazamientos respecto del origen a lo largo de cada uno de los ejes. Frecuentemente se utiliza la notación de par o terna ordenada, $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ para indicar cada una de las componentes cartesianas de $\mathbf{A}$. En estas notas utilizamos otra notación, que parte de observar que la dirección de los ejes coordenados puede expresarse utilizando vectores de módulo unitario o *versores*. Así se pueden utilizar los versores $\breve{\mathbf{i}}$, $\breve{\mathbf{j}}$, $\breve{\mathbf{k}}$ para indicar, respectivamente, la dirección de los ejes x, y y z. Vemos entonces que cualquier vector, de componentes A_x, A_y y A_z, se puede expresar como una suma vectorial

$$\mathbf{A} = A_x\breve{\mathbf{i}} + A_y\breve{\mathbf{j}} + A_z\breve{\mathbf{k}}. \tag{40}$$

Esta forma de descomponer a $\mathbf{A}$ como suma de escalares que multiplican a los versores es única. Un conjunto de vectores como los $\breve{\mathbf{i}}$, $\breve{\mathbf{j}}$, $\breve{\mathbf{k}}$ que permiten escribir a todos los vectores del espacio de una única manera se denomina *base* del espacio. Existen infinitas bases, pero todas tienen el mismo número de vectores (que es igual a la dimensión del espacio, y corresponde al número de ejes necesarios para definir un vector). La ventaja de esta notación es que hace explícito el SC en el cual se están expresando las coordenadas del vector.

A.1.2. Producto escalar y vectorial. Se define el *producto escalar* de dos vectores de modo que

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta_{AB}. \tag{41}$$

El *producto vectorial* está definido por

$$\begin{aligned}\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \breve{\mathbf{i}} & \breve{\mathbf{j}} & \breve{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \breve{\mathbf{i}}(A_yB_z - A_zB_y) + \breve{\mathbf{j}}(A_zB_x - A_xB_z) + \breve{\mathbf{k}}(A_xB_y - A_yB_x).\end{aligned} \tag{42}$$

Las barras horizontales indican el *determinante* de la matriz, cuyo desarrollo es el indicado en la segunda línea.

sencillo de un caso de rotación fuera de un eje principal donde se ve la necesidad de un torque perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ para sostener la rotación.

A.1.3. Coordenadas como proyecciones. Cuando los ejes coordenados (y por lo tanto los vectores de la base) son mutuamente ortogonales, las coordenadas se obtienen a partir del módulo $A = |\mathbf{A}|$ mediante

$$A_x = A\cos\theta_i, \qquad A_r = A\cos\theta_r, \tag{43}$$

$$A_y = A\,\mathrm{sen}\,\theta_i = A\cos\theta_j, \qquad A_t = A\,\mathrm{sen}\,\theta_r = A\cos\theta_t, \tag{44}$$

(donde vale $\mathrm{sen}\,\theta_i = \cos\theta_j$ porque θ_i y θ_j son complementarios). Esta operación se denomina *proyección ortogonal* del vector sobre el eje. La proyección puede expresarse también mediante el producto escalar, ya que al ser uno el módulo de los versores se tiene por ejemplo $A_x = A|\breve{\mathbf{i}}|\cos\theta_i = \breve{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{A}$. Las componentes cartesianas pueden entonces expresarse convenientemente como proyecciones sobre los respectivos vectores de la base:

$$A_x = \breve{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{A}, \qquad A_r = \breve{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}, \tag{45}$$

$$A_y = \breve{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{A} \qquad A_t = \breve{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{A}. \tag{46}$$

A.1.4. Productos triples. En el texto se usan varias veces las propiedades del producto mixto de tres vectores y del producto vectorial de tres vectores. El primero de ellos se escribe

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{47}$$

Como consecuencia de las propiedades del determinante, se cumple que el producto no se altera ante *permutaciones cíclicas* de los tres vectores:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}). \tag{48}$$

El otro producto que aparece en el texto es el producto vectorial triple $\mathbf{D} = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ (recordar que el producto vectorial *no es* asociativo). El producto triple puede desarrollarse según la regla del "back cab":

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}). \tag{49}$$

A.2. Trayectorias. La trayectoria de una partícula se representa con una función vectorial del tiempo, $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [t_0, t_1]$. Definimos la *velocidad* $\mathbf{v}(t)$ y la *aceleración* $\mathbf{a}(t)$ por

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{50}$$

A.2.1. Movimiento en un plano. La trayectoria tendrá lugar en un plano (no necesariamente coincidente con los planos definidos por los ejes de coordenadas) si existe un vector $\mathbf{n}$ tal que

$$\mathbf{n}\cdot[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)] = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{51}$$

es decir si el desplazamiento es perpendicular a $\mathbf{n}$ en cualquier instante mientras dure el movimiento. Derivando sucesivamente respecto de t, encontramos que entonces

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}(t) = 0, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}(t) = 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{52}$$

es decir que para que el movimiento tenga lugar en un plano, la velocidad y la aceleración deben permanecer siempre en el mismo plano[7]. El vector $\mathbf{n}$ puede elegirse como $\mathbf{n} = \mathbf{v}(t_0) \times \mathbf{a}(t_0)$, aunque naturalmente puede utilizarse cualquier otro vector colineal con éste[8].

Apéndice B. Derivada de un vector de módulo constante

Un resultado sencillo y muy útil en la descripción del movimiento circular es el hecho de que una función vectorial de módulo constante es perpendicular a su derivada. En efecto, si $d|\mathbf{r}|/dt = 0$ también es constante su cuadrado ($d|\mathbf{r}|^2 = dr^2/dt = 2rd|\mathbf{r}|/dt = 0$). Luego

$$0 = \frac{dr^2}{dt} = \frac{d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{53}$$

es decir $\mathbf{r} \perp d\mathbf{r}/dt$.

Considerando ahora una función vectorial cualquiera, podemos interpretarla como un producto de funciones, una de las cuales da la dirección del vector y la otra su módulo:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\check{\mathbf{r}}(t), \qquad \check{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}, \tag{54}$$

de manera que la derivada puede expresarse como

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\check{\mathbf{r}}(t) + r(t)\frac{d\check{\mathbf{r}}}{dt}. \tag{55}$$

Por el resultado anterior (53) sabemos que el segundo término es perpendicular a $\mathbf{r}$. Hemos entonces separado a la derivada en dos componentes, una paralela a la dirección instantánea de $\mathbf{r}(t)$ y otra perpendicular a la misma. Podemos afirmar entonces que, dado un intervalo temporal $I = [t_1, t_2]$,

1. un vector de módulo constante en I es perpendicular a su derivada, y
2. un vector de dirección constante en I es paralelo a su derivada.

También son válidas las afirmaciones recíprocas,

1. si un vector y su derivada son perpendiculares en I, su módulo es constante, y
2. si un vector y su derivada son paralelos en I, su dirección es constante.

Es importante poder afirmar que vector y derivada son paralelos o perpendiculares *en todo un intervalo* para poder afirmar las conclusiones correspondientes. En efecto, si bien no tiene sentido decir que un vector tiene módulo o dirección constante en un instante de tiempo, las ecuaciones (53) y (55) son válidas instantáneamente (es decir que si la derivada del módulo es nula en un instante, entonces la derivada es perpendicular al vector en ese instante, y lo mismo para la dirección). Podemos recíprocamente decir que si la derivada es perpendicular al vector, entonces la derivada del módulo es nula (o que si la derivada es paralela al vector, la derivada de la dirección es nula). Pero para concluir la constancia del módulo o la dirección en un intervalo, es necesario poder afirmar la condición *en todo el intervalo* (puesto que una derivada instantáneamente nula indica sólo un punto estacionario).

[7] Notar que para afirmar (52) es necesario que la igualdad (51) se cumpla en un intervalo de tiempo, y no sólo instantáneamente.

[8] En particular podría evaluarse el producto vectorial en cualquier $\hat{t}$ en el intervalo $[t_0, t_1]$.

Para demostrar las primera de las afirmaciones recíprocas, notemos que si $\mathbf{r}(t) \perp d\mathbf{r}/dt$ en I, entonces

$$r^2(t) = r^2(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{dr^2}{dt}\, dt' = r^2(t_1) + 2\int_{t_1}^{t} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt' = r^2(t_1), \qquad t \in I, \tag{56}$$

es decir que r^2 es constante en I. Para la segunda afirmación, observamos que si $\mathbf{r}(t)$ y $d\mathbf{r}/dr$ son paralelas en $I = [t_1, t_2]$, entonces $\mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}/dt = 0\ \forall t \in I$ y por lo tanto

$$0 = \mathbf{r}(t) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r(t)\mathbf{r}(t) \times \frac{d\check{\mathbf{r}}}{dt}, \tag{57}$$

que implica $d\check{\mathbf{r}}/dt = 0$ en I, ya que $d\check{\mathbf{r}}/dt$ y $\mathbf{r}(t)$ no son paralelos (son perpendiculares).

Apéndice C. Torque y momento angular

Definiendo el *torque* sobre una partícula $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ y el momento angular $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$, con $\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i = m_i\dot{\mathbf{r}}_i$. Podemos calcular la razón de cambio de $\mathbf{L}$ en un SRI utilizando la segunda ley de Newton ($\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i$):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \tag{58}$$

pues $\dot{\mathbf{r}}_i \parallel \mathbf{p}_i$. Separando la fuerza neta $\mathbf{F}_i$ sobre la partícula i en sus contribuciones interna y externa al sistema, ($\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} + \mathbf{F}_i^{(\mathrm{int})} = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} + \sum_j \mathbf{F}_{i,j}^{(\mathrm{int})}$) se tiene

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,j}^{(\mathrm{int})} &= \\ \sum_i \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{R},i}^{(\mathrm{ext})} + \sum_{i<j} \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,j}^{(\mathrm{int})} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{j,i}^{(\mathrm{int})}\right] &= \\ \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{R}}^{(\mathrm{ext})} + \sum_{i<j} [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j] \times \mathbf{F}_{i,j}^{(\mathrm{int})}&,\end{aligned} \tag{59}$$

pero el segundo término se anula si vale la forma fuerte de la tercera ley de Newton (las fuerzas de acción y reacción son iguales y opuestas y paralelas a la línea que une las partículas). En ese caso

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}^{(\mathrm{ext})}. \tag{60}$$

Consideremos ahora la razón de cambio del momento angular calculado en SR no inercial. Llamemos $\mathbf{R}$ a la posición del origen del SR no inercial respecto de un SRI, de modo que $\dot{\mathbf{R}}$ y $\ddot{\mathbf{R}}$ son respectivamente la velocidad y aceleración del SR respecto de nuestro SRI. El torque en el nuevo sistema es $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{R}} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i$, y el momento angular $\mathbf{L}_{\mathbf{R}} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times m_i(\mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{R}})$. Su razón de cambio es entonces

$$
\begin{aligned}
(61)\quad \frac{d\mathbf{L_R}}{dt} &= \sum_i m_i \frac{d[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{R}})]}{dt} = \\
&\sum_i m_i(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}}) \times (\mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{R}}) + \sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\ddot{\mathbf{r}}_i - \ddot{\mathbf{R}}) \\
&= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{R}}) = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{R},i} - \sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \ddot{\mathbf{R}} = \\
&\qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{R}}^{(\mathrm{ext})} - M(\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} - \mathbf{R}) \times \ddot{\mathbf{R}},
\end{aligned}
$$

donde hemos cancelado los torques internos invocando nuevamente la forma fuerte de la tercera ley. Nótese que si bien $\mathbf{L_R}$ está definido respecto de un SR no inercial, las leyes de Newton sólo se han utilizado desde el SRI, como debe ser, pues hemos expresado los vectores del SR no inercial en función de las posiciones $\mathbf{r}_i$ y sus derivadas, que corresponden al SRI. Hemos así obtenido una generalización de (60) válida en cualquier sistema de referencia:

$$
(62)\qquad \frac{d\mathbf{L_R}}{dt} = \tau_{\mathbf{R}}^{(\mathrm{ext})} - M(\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} - \mathbf{R}) \times \ddot{\mathbf{R}}.
$$

Evidentemente (62) se reduce a (60) cuando el sistema es inercial ($\ddot{\mathbf{R}} = 0$), pero también cuando el sistema no inercial es el sistema del centro de masa ($\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \mathbf{R}$) o cuando la aceleración del sistema está en la línea que une al origen con el centro de masa ($\ddot{\mathbf{R}} \parallel [\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} - \mathbf{R}]$).

Referencias

Alonso, M. y Finn, E. J. (1970), *Fisica Vol I: Mecánica*, Fondo Educativo Interamericano.

Goldstein, H., Poole Jr., C. P. y Safko, J. L. (2001), *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, San Francisco, 3 edición.

Santaló, L. A. (1961), *Vectores y Tensores*, EUdeBA, Buenos Aires.